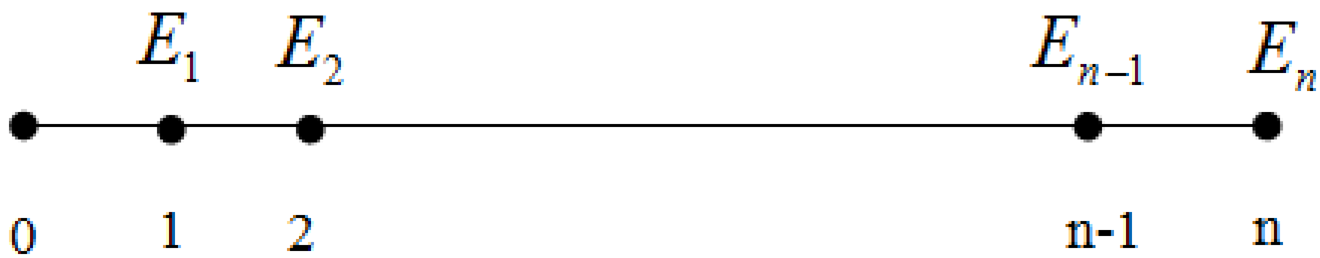
Arytmetyka finansowa

Wykład 2-3

Dr Wioletta Nowak

Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + E_1(n-1)r + E_2(n-2)r + \cdots + E_{n-1}r$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + E_1 n \cdot r + E_2(n-1)r + \cdots + E_n r$$

Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} r\right)$$

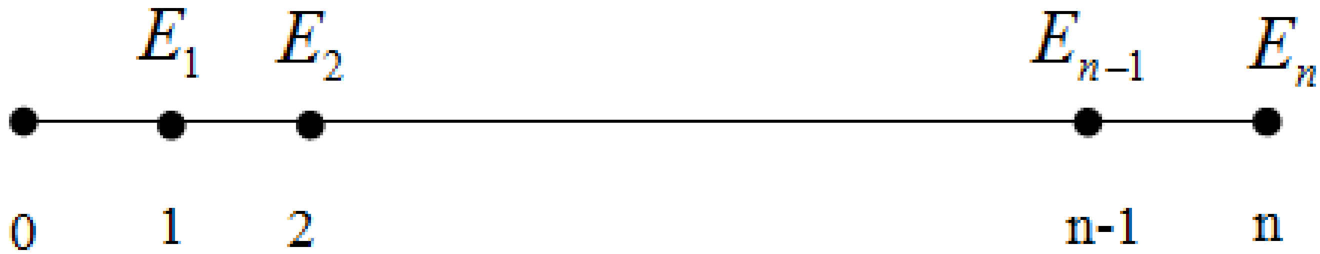
Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} r\right)$$

$$K_0 = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n \pm 1}{2} r\right) \frac{1}{1 + n \cdot r}$$

$$K_t = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n \pm 1}{2} r\right) \frac{1 + t \cdot r}{1 + n \cdot r} \qquad t \in (0, n)$$

Oprocentowanie złożone wkładów



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1(1+r)^{n-1} + E_2(1+r)^{n-2} + \cdots + E_{n-1}(1+r) + E_n$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1(1+r)^{n} + E_2(1+r)^{n-1} + \cdots + E_{n}(1+r)$$

Oprocentowanie złożone wkładów

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot \frac{\left(1+r\right)^n - 1}{r}$$

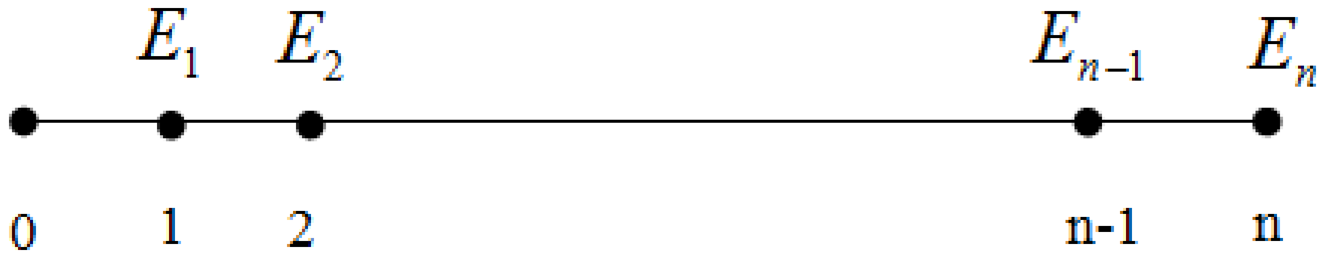
Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot \left(1+r\right)\frac{\left(1+r\right)^n - 1}{r}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1+r\right)^n}$$

$$K_t = \frac{K_n}{\left(1+r\right)^{n-t}} \quad t \in \left(0, n\right)$$

Oprocentowanie ciągłe wkładów



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1 \cdot e^{(n-1)r} + E_2 \cdot e^{(n-2)r} + \cdots + E_{n-1} \cdot e^r + E_n$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1 \cdot e^{n \cdot r} + E_2 \cdot e^{(n-1)r} + \cdots + E_n \cdot e^r$$

Oprocentowanie ciągłe wkładów

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot e^r \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

$$K_t = K_n \cdot e^{-(n-t) \cdot r} \qquad t \in (0, n)$$

$$K_0 = E \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

$$K_0 = E \cdot e^r \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

Przykład 1

- Przez ile lat należy wpłacać na początku każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.

Przykład 1

$$E = 10 \qquad K_n = 100 \qquad r = 12\%$$

$$K_n = E \cdot (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

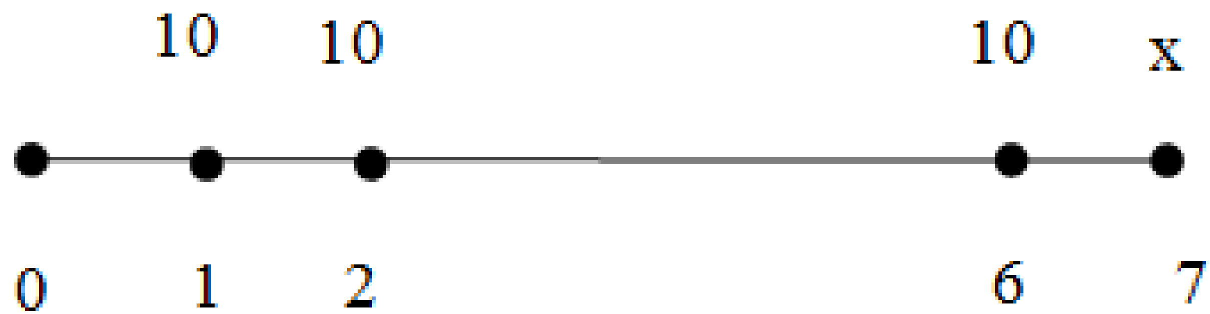
$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{r \cdot K_n}{E \cdot (1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\dfrac{0.12 \cdot 100}{10 \cdot 1.12} + 1\right)}{\ln(1.12)}$$

$$\boxed{n = 6.43}$$

Przykład 1

- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

Przykład 1 - dodatkowa niepełna wpłata



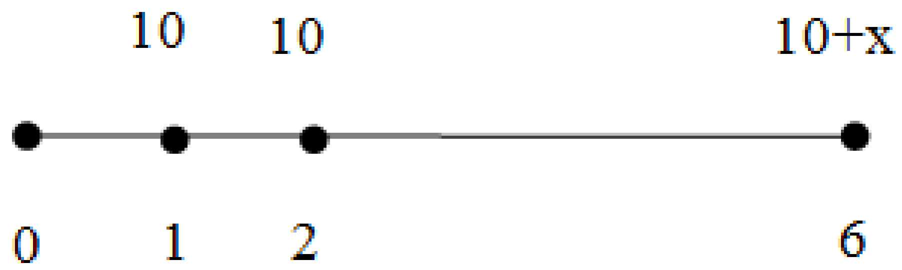
$$K_6 = 90.89 \qquad K_6 + x = 100$$

$$x = 9.11$$

$$(K_6 + x)\cdot(1 + r) = 100$$

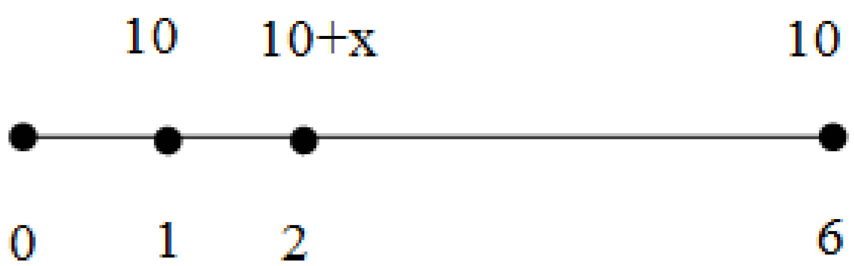
$x = -1.60$ (Rozwiązanie odrzucić)

Przykład 1 - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x \cdot (1 + r) = 100$$

$$x = 8.13$$



$$K_6 + x \cdot (1 + r)^5 = 100$$

$$x = 5.17$$

Przykład 1 – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}$$

$n = 6$ $E = 11.00$

Przykład 1a

- Przez ile lat należy wpłacać <u>na końcu</u> każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.

Przykład 1a

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{r \cdot K_n}{E} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = 6.96$$

- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

Przykład 1a - dodatkowa niepełna wpłata

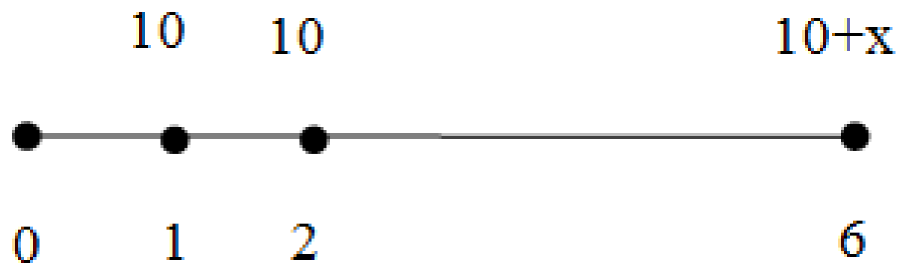
$$K_6 \cdot (1 + r) + x = 100$$

$$K_n = E \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

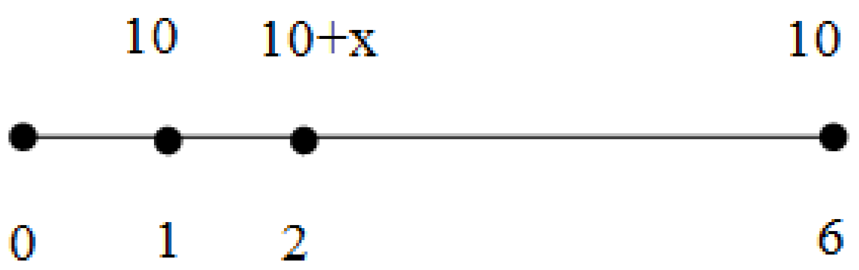
$$x = 9.11$$

$$K_6 = 81.15$$

Przykład 1a - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x = 100$$
$$x = 18.85$$



$$K_6 + x \cdot (1 + r)^4 = 100$$
$$x = 11.98$$

Przykład 1a – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)^n - 1}$$

$n = 7$ $\quad$ $E = 9.91$

Przykład 2
Oprocentowanie proste – wkłady z góry

$E = 10$ $\quad K_n = 100$ $\quad r = 12\%$

$$K_n = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} r\right)$$

$$100 = 10 \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot 0.12\right)$$

$$3 \cdot n^2 + 53 \cdot n - 500 = 0$$

$$\boxed{n = 6.81}$$

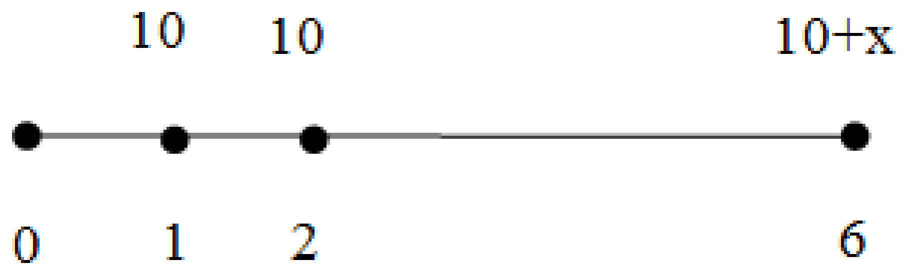
Dodatkowa niepełna wpłata

$$K_6 = 10 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{6+1}{2} \cdot 0.12\right) = 85.2$$

$$K_6 + x = 100 \qquad x = 14.8$$

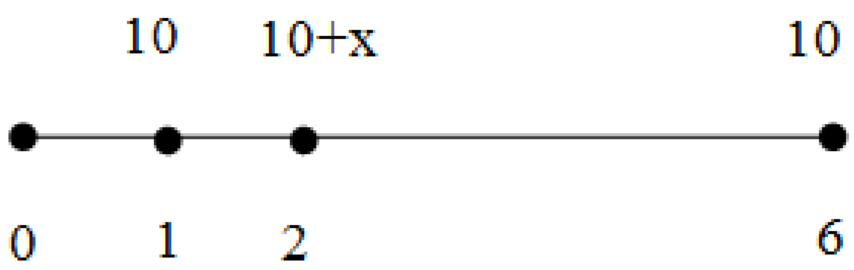
$$\left(K_6 + x\right) \cdot \left(1 + r\right) = 100 \qquad x = 4.09$$

Powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x \cdot (1 + r) = 100$$

$$x = 13.21$$



$$K_6 + x \cdot (1 + 5r) = 100$$

$$x = 9.25$$

$$K_6 = 85.2$$

Nowe wpłaty

$$E = \frac{K_n}{n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} r\right)}$$

$n = 7$ $E = 9.65$

Przykład 3a

- Wykłady w wysokości 100 zł wnoszone na koniec roku. Znajdź wartość wkładów po 10 latach, jeśli w ciągu pierwszych 6 lat nominalna stopa % wynosiła 6%, a w ciągu następnych 4 lat 4%.

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$100 \cdot \frac{(1+0.06)^6 - 1}{0.06}(1.04)^4 + 100 \cdot \frac{(1+0.04)^4 - 1}{0.04} = 1240.66$$

Przykład 3b

- Pierwsze 6 wkładów ulokowano przy stopie 6%, a ostatnie 4 przy stopie 4%.

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$100 \cdot \frac{(1+0.06)^6 - 1}{0.06}(1.06)^4 + 100 \cdot \frac{(1+0.04)^4 - 1}{0.04} = 1305.26$$

Renta o stałych ratach

$$K_N = K(1+r)^N - A_N$$

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) \qquad K = \frac{a\cdot(1+r)}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Wysokość renty

$$a = \frac{K\cdot r}{1-(1+r)^{-N}} \qquad a = \frac{1}{1+r}\frac{K\cdot r}{\left(1-(1+r)^{-N}\right)}$$

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Okres wypłacania renty

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1+r)}$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{(1+r) \cdot a}\right)}{\ln(1+r)}$$

Renta wieczysta

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a_w}{r}$$

$$K = \frac{a_w \cdot (1+r)}{r}$$

$$K = \lim_{N\to\infty} \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) = \frac{a}{r}$$

Przykład 4 – renta wypłacana z dołu

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.1	11.5
2	11.5	11.9	4.1	7.8
3	7.8	8.1	4.1	4.0
4	4.0	4.1	4.1	0

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 4a – renta wypłacana z góry

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.0	11.0
2	11.0	11.5	4.0	7.5
3	7.5	7.8	4.0	3.8
4	3.8	4.0	4.0	0

$$a = \frac{1}{1+r}\frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 5

- Jaka powinna być stopa procentowa by z kapitału 100 zł można było wypłacać 12 zł przez 10 lat

a) z dołu

$$r = 3.46\%$$

$$1 = (1+r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)$$

b) z góry

$$r = 4.304\%$$

$$1 = (1+r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{(1+r) \cdot a}\right)$$

Przykład 6

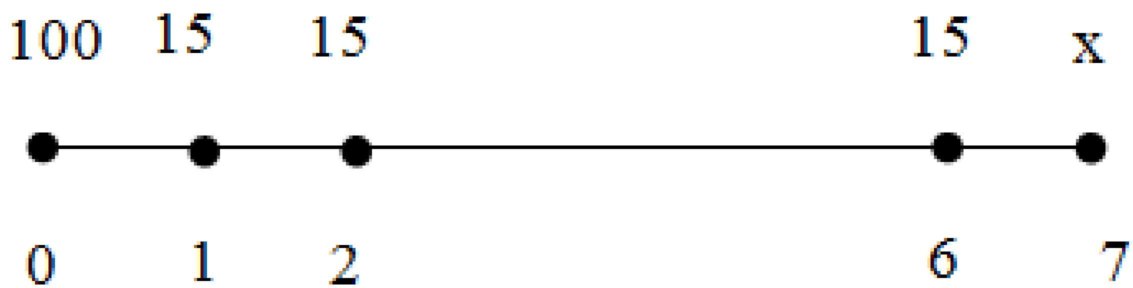
- Przez ile lat można z 100 zł stałą rentę roczną z dołu w wysokości 15 zł? Roczna stopa procentowa 1%.

$$N = 6.93$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln\left(1 + r\right)}$$

- Dodatkowa niepełna renta
- Powiększenie jednej z rent
- Zaokrąglenie liczby rent do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych rent

Przykład 6 - Dodatkowa niepełna renta



$$\left(K(1+r)^6 - A_6\right)\cdot(1+r) = x$$

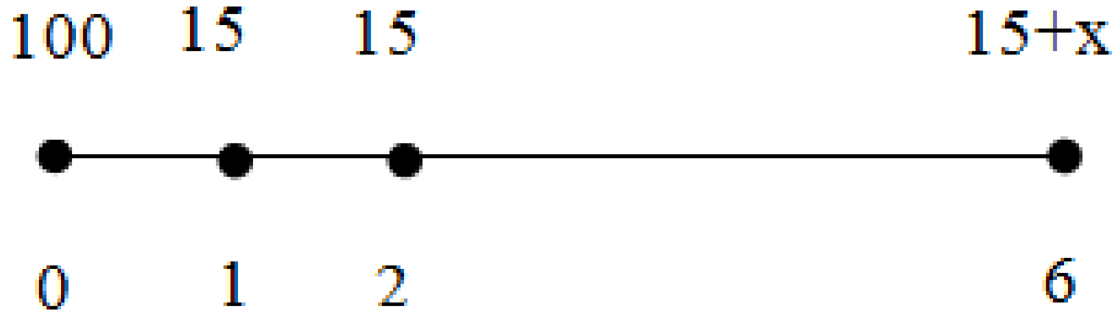
$$A_6 = a \cdot \frac{(1+r)^6 - 1}{r}$$

$$K(1+r)^6 - A_6 = \frac{x}{1+r}$$

$$x = 14.011$$

$$K = \frac{A_6}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^7}$$

Przykład 6 - Powiększenie jednej z rent



$$K(1+r)^6 - A_6 = x$$

$$x = 13.87$$

Przykład 6 – Nowa renta stała

$$a = \frac{K \cdot r}{1 - (1 + r)^{-7}} \qquad a = \frac{100 \cdot 0.01}{1 - (1 + 0.01)^{-7}} = 14.86$$

Przykład 7

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20% (kapitalizacja złożona kwartalna). Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100 \qquad r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	5	30	75
2	75	25	3.75	28.75	50
3	50	25	2.5	27.5	25
4	25	25	1.25	26.25	0
		100	**12.5**	**112.5**	

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od spłaconego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	1.25	26.25	75
2	75	25	2.5	27.5	50
3	50	25	3.75	28.75	25
4	25	25	5	30	0
		100	**12.5**	**112.5**	

Plan spłaty długu – ustalone raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	10	5	15	90
2	90	20	4.5	24.5	70
3	70	20	3.5	23.5	50
4	50	50	2.5	52.5	0
		100	**15.5**	**115.5**	

Plan spłaty długu – dług spłacony w 4 kwartale

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	0	5	5	100
2	100	0	5	5	100
3	100	0	5	5	100
4	100	100	5	105	0
		100	**20**	**120**	

Spłata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja złożona z dołu

$$S(1+r)^N = A_1(1+r)^{N-1} + A_2(1+r)^{N-2} + \cdots + A_N$$

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(1+r)^N}$$

$$S(1+r)^N = A\frac{(1+r)^N - 1}{r}$$

$$\boxed{A = \frac{S \cdot r \cdot (1+r)^N}{(1+r)^N - 1}}$$

Spłata długów – równe raty łączne

$$Z_n = r \cdot S_{n-1} \qquad T_n = S_{n-1} - S_n \qquad A_n = T_n + Z_n$$

$$S_n = S(1+r)^n - \left(A_1(1+r)^{n-1} + A_2(1+r)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(1+r)\right) - A_n$$

$$S_n = (1+r)\left(S(1+r)^{n-1} - \left(A_1(1+r)^{n-2} + A_2(1+r)^{n-3} + \cdots + A_{n-1}\right)\right) - A_n$$

$$S_n = (1+r)S_{n-1} - A_n$$

Spłata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja ciągła

$$Se^{r\cdot N} = A_1 e^{r(N-1)} + A_2 e^{r(N-2)} + \cdots + A_N$$

$$Se^{r\cdot N} = A\frac{e^{r\cdot N}-1}{e^r-1}$$

$$\boxed{A = S\cdot e^{r\cdot N}\cdot\frac{e^r-1}{e^{r\cdot N}-1}}$$

$$\boxed{Z_n = S_{n-1}\cdot\left(e^r-1\right) \qquad T_n = S_{n-1}-S_n \qquad A_n = T_n + Z_n}$$

Przykład 8

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20% (kapitalizacja złożona kwartalna). Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100 \qquad r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.2	5	28.2	76.8
2	76.8	24.36	3.84	28.2	52.44
3	52.44	25.58	2.62	28.2	26.86
4	26.86	26.86	1.34	28.2	0
		100	**12.8**	**112.8**	

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja ciągła)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.16	5.13	28.28	76.84
2	76.84	24.34	3.94	28.28	52.5
3	52.5	25.59	2.69	28.28	26.91
4	26.91	26.91	1.38	28.28	0
		100	**13.14**	**113.14**	

Plan spłaty długu – ustalone raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	15	5	20	85
2	85	25.75	4.25	30	59.25
3	59.25	37.04	2.96	40	22.21
4	22.21	22.21	1.11	23.32	0
		100	**13.32**	**113.32**	

$$S(1+r)^4 = A_1(1+r)^3 + A_2(1+r)^2 + A_3(1+r) + \boxed{A_4}$$