

Arytmetyka finansowa

Wykład 3 cd

Dr Wioletta Nowak

Splata długów - podstawy

- Cel: przygotowanie planu spłaty długów
- Każda rata łączna składa się z dwóch części: rata kapitałowa (część długu, która jest spłacana) i odsetki.
- Najczęściej dług spłaca się w **równych ratach łącznych** (taka sama rata przez cały okres spłaty) lub **równych ratach kapitałowych** (taką samą część długu spłacamy z każdą ratą).

Plan spłaty długu

- Plan spłaty długu informuje nas o tym ile wynosi rata łączna, jaką część długu spłacamy z każdą ratą (ile wynosi rata kapitałowa), ile płacimy odsetek z daną ratą oraz ile mamy jeszcze do spłacenia po zapłaceniu danej raty.

Plan spłaty długu

Oznaczenia: S – dług, N – liczba rat, r – stopa procentowa

- Dług przed spłatą n -tej raty S_{n-1}
- Dług po spłacie n -tej raty S_n
- n -ta rata łączna A_n
- n -ta rata kapitałowa T_n
- Odsetki spłacane z n -tą ratą Z_n

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe

- Równe raty kapitałowe – z każdą ratą spłacamy tyle samo długu.
- Plan spłaty – schemat postępowania:
 1. Policzyć ratę kapitałową (dług dzielimy przez N, gdy dług ma być spłacony w N ratach) $T_n = \frac{S}{N}$
 2. Wpisać dług do tabelki jako $S = S_0$
 3. Policzyć odsetki według wzoru $Z_n = r \cdot S_{n-1}$

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe

4. Policzyć ratę łączną $A_n = T_n + Z_n$

5. Policzyć dług po zapłaceniu n-tej raty

$$S_n = S_{n-1} - T_n$$

6. Dług po zapłaceniu n-tej raty jest długiem przed zapłaceniem n+1-tej raty (po zapłaceniu pierwszej to dług przed zapłaceniem drugiej itd.).

7. Jeśli dług ma być spłacony w N ratach, to po zapłaceniu N-tej raty długu nie ma. $S_N = 0$

Przykład 1

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20% (kapitalizacja złożona kwartalna). Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100$$

$$r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

$$T_n = \frac{100}{4} = 25$$

Stopa dostosowana
do okresu spłaty,
spłaty zgodne

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25			
2		25			
3		25			
4		25			
Razem		100			

Następnie liczymy odsetki, ratę łączną, dług po zapłaceniu raty pierwszej, Dług po zapłaceniu raty pierwszej to dług przed zapłaceniem drugiej i powtarzamy procedurę aż do spłacenia długu

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	5	30	75
2	75	25	3.75	28.75	50
3	50	25	2.5	27.5	25
4	25	25	1.25	26.25	0
Razem		100	12.5	112.5	

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe

- W przypadku równych rat kapitałowych odsetki mogą być liczone także od spłaconego długu.
- Schemat postępowania, jak wcześniej.

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od spłaconego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25			
2		25			
3		25			
4		25			
		100			

Uwaga: z pierwszą ratą spłacamy 25 zł, z drugą 50 zł, z trzecią 75 zł, z czwartą 100 zł

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od spłaconego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	1.25	26.25	75
2	75	25	2.5	27.5	50
3	50	25	3.75	28.75	25
4	25	25	5	30	0
		100	12.5	112.5	

Plan spłaty długu – ustalone raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	10			
2		20			
3		20			
4		50			
		100			

Założmy, że z pierwszą ratą spłacamy 10 zł długu, z drugą 20 zł, trzecią 20 zł i z czwartą 50 zł.

Plan spłaty długu – ustalone raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	10	5	15	90
2	90	20	4.5	24.5	70
3	70	20	3.5	23.5	50
4	50	50	2.5	52.5	0
		100	15.5	115.5	

Plan spłaty długu – dług spłacony w 4 kwartale

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	0			
2		0			
3		0			
4		100			
		100			

Plan spłaty długu – dług spłacony w 4 kwartale

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	0	5	5	100
2	100	0	5	5	100
3	100	0	5	5	100
4	100	100	5	105	0
		100	20	120	

Plan spłaty długu – równe raty łączne

- W tym przypadku najpierw należy policzyć wartość raty łącznej.
- Można zastosować kapitalizację złożoną z dołu lub kapitalizację ciągłą.
- Podstawowa zasada przy wyprowadzaniu wzorów na ratę łączną: wartość długu i wartość rat łącznych dług umarzających ma być taka sama w danym momencie czasu (nie ma znaczenia, który okres rozważamy. Najwygodniej wybrać koniec ostatniego okresu lub początek pierwszego).

Splata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja złożona z dołu

$$S(1+r)^N = A_1(1+r)^{N-1} + A_2(1+r)^{N-2} + \dots + A_N \quad \text{Koniec ostatniego}$$

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_N}{(1+r)^N} \quad \text{Początek pierwszego}$$

$$S(1+r)^N = A \frac{(1+r)^N - 1}{r}$$

$$A = \frac{S \cdot r \cdot (1+r)^N}{(1+r)^N - 1}$$

Splata dlużów – równe raty łączne

$$Z_n = r \cdot S_{n-1} \quad T_n = S_{n-1} - S_n \quad A_n = T_n + Z_n$$

$$S_n = S(1+r)^n - \left(A_1(1+r)^{n-1} + A_2(1+r)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(1+r) \right) - A_n$$

$$S_n = (1+r) \left(S(1+r)^{n-1} - \left(A_1(1+r)^{n-2} + A_2(1+r)^{n-3} + \dots + A_{n-1} \right) \right) - A_n$$

$$S_n = (1+r)S_{n-1} - A_n$$

Splata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja ciągła

$$Se^{r \cdot N} = A_1 e^{r(N-1)} + A_2 e^{r(N-2)} + \dots + A_N$$

$$Se^{r \cdot N} = A \frac{e^{r \cdot N} - 1}{e^r - 1}$$

$$A = S \cdot e^{r \cdot N} \cdot \frac{e^r - 1}{e^{r \cdot N} - 1}$$

$$Z_n = S_{n-1} \cdot (e^r - 1) \quad T_n = S_{n-1} - S_n \quad A_n = T_n + Z_n$$

Przykład 2

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20%. Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100 \qquad r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Schemat postępowania – kapitalizacja złożona z dołu

1. Należy policzyć ratę łączną według wzoru

$$A = \frac{S \cdot r \cdot (1 + r)^N}{(1 + r)^N - 1} = \frac{100 \cdot 0.05 \cdot (1 + 0.05)^4}{(1 + 0.05)^4 - 1} = 28.2$$

2. Następnie liczymy odsetki $Z_n = r \cdot S_{n-1}$

3. Liczymy ratę kapitałową $T_n = A_n - Z_n$

4. Liczymy dług po zapłaceniu danej raty

$$S_n = S_{n-1} - T_n$$

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100			28.2	
2				28.2	
3				28.2	
4				28.2	
				112.8	

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.2	5	28.2	76.8
2	76.8	24.36	3.84	28.2	52.44
3	52.44	25.58	2.62	28.2	26.86
4	26.86	26.86	1.34	28.2	0
		100	12.8	112.8	

Schemat postępowania – kapitalizacja ciągła

1. Należy policzyć ratę łączną według wzoru

$$A = S \cdot e^{r \cdot N} \cdot \frac{e^r - 1}{e^{r \cdot N} - 1} = 100 \cdot e^{0.05 \cdot 4} \cdot \frac{e^{0.05} - 1}{e^{0.05 \cdot 4} - 1} = 28.28$$

2. Następnie liczymy odsetki $Z_n = S_{n-1} \cdot (e^r - 1)$

3. Liczymy ratę kapitałową $T_n = A_n - Z_n$

4. Liczymy dług po zapłaceniu danej raty

$$S_n = S_{n-1} - T_n$$

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja ciągła)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100			28.28	
2				28.28	
3				28.28	
4				28.28	
				113.14	

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja ciągła)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.16	5.13	28.28	76.84
2	76.84	24.34	3.94	28.28	52.5
3	52.5	25.59	2.69	28.28	26.91
4	26.91	26.91	1.38	28.28	0
		100	13.14	113.14	

Zadane raty łączne

- W tym przypadku, możemy zadać $n-1$ rat łącznych, ale jedną ratę trzeba policzyć przestrzegając zasady, że dług jest spłacony jeśli wartość długu i rat go umarzających jest w danym momencie czasu taka sama.

Plan spłaty długu – ustalone raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100			20	
2				30	
3				40	
4					

Założmy, że pierwszą ratę zapłacimy w wysokości 20 zł, druga to 30 zł, trzecia 40 zł. Ułożyć plan spłaty.

Plan spłaty długu – ustalone raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100			20	
2				30	
3				40	
4				23.32	
				113.32	

Najpierw należy policzyć brakującą ratę łączną.

$$S(1+r)^4 = A_1(1+r)^3 + A_2(1+r)^2 + A_3(1+r) + \boxed{A_4}$$

$$100(1.05)^4 = 20(1.05)^3 + 30(1.05)^2 + 40(1.05) + A_4$$

Uwaga:

Jeśli brakuje raty ostatniej, to można ją otrzymać po wypełnieniu tabelki z zadanymi ratami.

Gdy brakuje jakiegokolwiek innej niż ostatnia raty, to trzeba ją liczyć ze wzoru.

Plan spłaty długu – ustalone raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	15	5	20	85
2	85	25.75	4.25	30	59.25
3	59.25	37.04	2.96	40	22.21
4	22.21	22.21	1.11	23.32	0
		100	13.32	113.32	