Arytmetyka finansowa

Wykład 3

Dr Wioletta Nowak

- Celem wykładu jest wyznaczenie wartości kapitału rentowego, wysokości renty, okresu wypłacania rent dla rent z dołu (kwoty wypłacane na koniec danego okresu) i rent z góry (kwoty wypłacane na początek danego okresu).
- Stosujemy kapitalizację złożoną z dołu.
- Podstawowa zasada: wartość kapitału rentowego (kapitału, z którego wypłacane są renty) i wartość wszystkich wypłaconych rent musi być taka sama w danym momencie czasu (nie ma znaczenia, który okres wybierzemy, najlepiej wybrać koniec ostatniego lub początek pierwszego „koniec zerowego”).

Przypominam, że nie można porównywać wartości w różnych momentach czasu.

Kolejna zasada: stopa procentowa musi być dostosowana do okresu wypłat rent. Jeśli renty wypłacane są co miesiąc to we wzorach stopa miesięczna, jeśli co roku to stopa roczna itd.

Jeśli okres kapitalizacji różni się od okresu stopy procentowej, wtedy kapitalizację należy uzgodnić.

Np. renty co miesiąc, a kapitalizacja półroczna, liczymy równoważną stopę miesięczną. Renty co pół roku, kapitalizacja miesięczna; liczymy efektywną stopę półroczną itd.

Wartość kapitału rentowego na koniec danego okresu liczymy tak, jak wartość przyszłą w kapitalizacji złożonej z dołu.

By policzyć wartość wszystkich wypłaconych rent z dołu (z góry) stosujemy wzory na wartość wkładów z dołu (z góry).

Oznaczenia we wzorach:

K – kapitał rentowy, a – wysokość renty, N – liczba okresów wypłacania renty, r – stopa procentowa

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu (warunek równości kapitału rentowego **K** i **N** rent w wysokości **a** na koniec **N**-tego okresu)

$$K(1+r)^N - A_N = K(1+r)^N - a\frac{(1+r)^N - 1}{r} = 0$$

- Renta wypłacana z góry

$$K(1+r)^N - A_N = K(1+r)^N - a \cdot (1+r)\frac{(1+r)^N - 1}{r} = 0$$

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

$$K = \frac{a \cdot (1+r)}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Wysokość renty

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$a = \frac{1}{1+r}\frac{K \cdot r}{\left(1-(1+r)^{-N}\right)}$$

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Okres wypłacania renty

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1+r)}$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{(1+r) \cdot a}\right)}{\ln(1+r)}$$

Renta wieczysta

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a_w}{r}$$

$$K = \frac{a_w \cdot (1+r)}{r}$$

$$K = \lim_{N \to \infty} \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) = \frac{a}{r}$$

Plan wypłat rent z dołu

- Kapitał rentowy przed wypłaceniem N-tej renty K_{N-1}
- Kapitał rentowy po wypłaceniu N-tej renty

  K_N
- Renta **a**
- W przykładzie z kapitału 15 zł wypłacamy 4 renty z dołu, stopa 4% (dostosowana do okresu)

Plan wypłat rent z dołu

- Najpierw liczymy rentę ze wzoru a=4.1 i wpisujemy wartości do tabelki.
- Następnie wpisujemy wartość kapitału rentowego 15. Jest to wartość na koniec okresu 0 (początek 1)
- Renta jest z dołu. Pierwsza renta na koniec okresu 1, stąd musimy policzyć wartość kapitału rentowego na koniec pierwszego okresu 15.6. Od kapitału rentowego 15.6 odejmujemy rentę 4.1 i otrzymujemy kapitał po wypłaceniu pierwszej renty 11.5.
- Kapitał 11.5 to kapitał przed wypłaceniem renty drugiej. Itd.
- Po wypłaceniu 4 rent kapitału rentowego nie ma.

Przykład 1 – renta wypłacana z dołu

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.1	11.5
2	11.5	11.9	4.1	7.8
3	7.8	8.1	4.1	4.0
4	4.0	4.1	4.1	0

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Plan wypłat rent z góry

- Najpierw liczymy rentę ze wzoru a=4.0 i wpisujemy wartości do tabelki.
- Następnie wpisujemy wartość kapitału rentowego 15. Jest to wartość na koniec okresu 0 (początek 1)
- Renta jest z góry. Pierwsza renta na początek okresu 1, kapitał rentowy też. Od 15 odejmujemy 4.0 i mamy kapitał po wypłaceniu pierwszej renty 11.
- Kapitał 11 to kapitał przed wypłaceniem renty drugiej, ale na początku pierwszego okresu. Druga renta jest wypłacana na początek drugiego okresu stąd należy 11 zaktualizować o jeden okres 11.5 i dopiero wtedy odjąć drugą rentę. Itd.
- Po wypłaceniu 4 rent kapitału rentowego nie ma.

Przykład 1a – renta wypłacana z góry

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0		4.0	11.0
2	11.0	11.5	4.0	7.5
3	7.5	7.8	4.0	3.8
4	3.8	4.0	4.0	0

$$a = \frac{1}{1+r}\frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 2

- Przez ile lat można ze 100 zł wypłacać stałą rentę roczną z dołu w wysokości 15 zł? Roczna stopa procentowa 1%.

$$N = 6.93$$

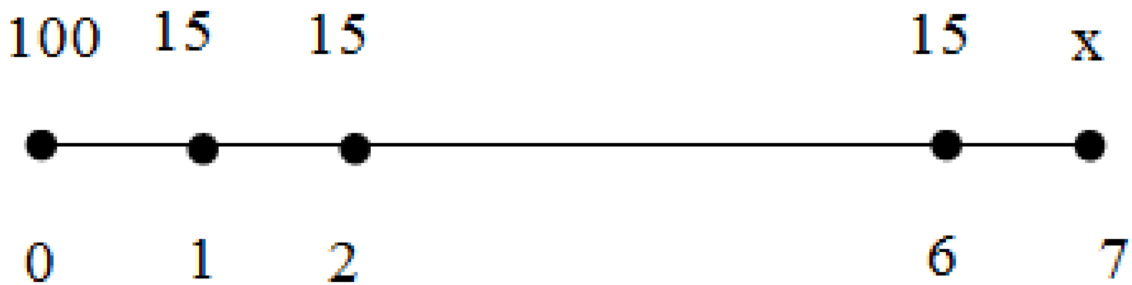
$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1+r)}$$

- Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy niecałkowitą liczbę rent.

Przykład 2

- Rozwiązanie problemu niepełnej liczby rent (wypłat)
  - Dodatkowa niepełna renta
  - Powiększenie jednej z rent
  - Zaokrąglenie liczby rent do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych rent.
- Warunek równości kapitału rentowego i wypłaconych rent może być zapisany na koniec dowolnego okresu.

Przykład 3 - Dodatkowa niepełna renta x



$$\left(K(1+r)^6 - A_6\right)\cdot(1+r) = x$$

Koniec siódmego

$$K(1+r)^6 = \frac{x}{1+r} + A_6$$

Koniec szóstego

$$A_6 = a \cdot \frac{(1+r)^6 - 1}{r}$$

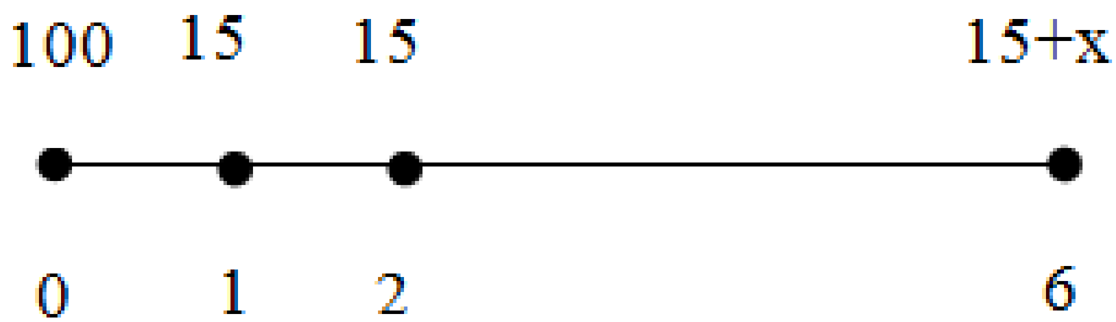
Wartość sześciu rent na koniec szóstego

$$K = \frac{A_6}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^7}$$

Koniec zerowego/
Początek pierwszego

$$x = 14.011$$

Przykład 3 - Powiększenie jednej z rent o x



$$K(1+r)^6 - A_6 = x$$ Koniec szóstego

$$x = 13.87$$

Przykład 3 – Nowa renta stała

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-7}} \qquad a = \frac{100 \cdot 0.01}{1-(1+0.01)^{-7}} = 14.86$$

Zaokrąglamy liczbę rent do 7 i liczymy nowe renty