Zadania z ekonomii matematycznej SSE2/1 (2017/2018)
Lista 1

1. Narysuj krzywą obojętności

a) $u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\min\{x_1, 2x_2\}$, jeśli $u = 4$;

b) $u(x_1, x_2) = \min\{3x_1 + x_2,\ x_1 + 3x_2\}$ przechodzącą przez punkt $(4, 2)$;

c) $u(x_1, x_2) = \min\{x_1 + 7x_2, 4x_1 + x_2\}$, jeśli $u(x_1, x_2) = 6$.

2. Oblicz pochodne cząstkowe: $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ oraz iloraz $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$,

gdy:

a) $u(x_1, x_2) = (7x_1 + 5)(x_2 + 3)$; b) $u(x_1, x_2) = 3(x_1 + 2)\left(\frac{x_2}{5} + 1\right)$;

c) $u(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 + x_2 + 6$; d) $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^5$; e) $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^7$;

f) $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}}$; g) $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}}\right)^4$; h) $u(x_1, x_2) = 6\ln x_1 + \frac{1}{3}\ln x_2$.

2. Rozwiąż zadanie

a) $\max_{x_1, x_2} \left(\frac{1}{2}x_1 + 1\right)(x_2 + 2)$, $2x_1 + x_2 = 8$

b) $\max_{x_1, x_2} x_1 + x_1x_2 + x_2 + 1$, $x_1 + 3x_2 = 9$

c) $\max_{x_1, x_2} x_1^{0,6} x_2^{0,4}$, $3x_1 + 4x_2 = 5$

d) $\max_{x_1, x_2} 3(x_1 + 1)(x_2 + 2)$, $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ $\quad p_1, p_2, I > 0$.

3. Znajdź optymalny koszyk (x_1, x_2), jeśli:

Funkcja użyteczności	Ograniczenie budżetowe
a) $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 3)$	$x_1 + 2x_2 = 6$
b) $u(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 + 2\right)(x_2 + 4)$	$2x_1 + x_2 = 10$
c) $u(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}x_1 + 3\right)(x_2 + 3)$	$3x_1 + x_2 = 30$

d) $u(x_1,x_2)=(x_1+2)\left(\frac{1}{4}x_2+2\right)$	$x_1+2x_2=20$
e) $u(x_1,x_2)=2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{3}x_1+5x_2=3$
f) $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}x_2$	$x_1+2x_2=6$

4. Dane jest ograniczenie budżetowe $p_1x_1+p_2x_2=I$, $p_1,p_2,I>0$. Znajdź funkcje popytu $x_1(p_1,p_2,I)$ i $x_2(p_2,p_1,I)$ dla funkcji użyteczności postaci:

a) $u(x_1,x_2)=\frac{1}{3}(x_1+2)(x_2+1)$, b) $u(x_1,x_2)=3x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{6}}$,

c) $u(x_1,x_2)=x_1^3x_2$, d) $u(x_1,x_2)=a\ln x_1+(1-a)\ln x_2$, $a\in(0,1)$,

e) $u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, f) $u(x_1,x_2)=\left(x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{1}{2}}\right)^4$,

g) $u(x_1,x_2)=4\min\{4x_1+x_2,x_1+4x_2\}$,

h) $u(x_1,x_2)=\min\{4x_1+x_2,x_1+7x_2\}$.

5. Rozwiąż zadanie

a) $\min\limits_{x_1,x_2}\ p_1x_1+p_2x_2$, $u=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}$ b) $\min\limits_{x_1,x_2}\ p_1x_1+p_2x_2$, $u=x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{2}}$ $p_1,p_2,u>0$.

6. Dane są funkcje użyteczności:

a) $u(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1x_2}+1$; b) $u(x_1,x_2)=x_1x_2$; c) $u(x_1,x_2)=(x_1x_2)^2+4$;

d) $u(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1x_2}$; e) $u(x_1,x_2)=e^{2x_1x_2+1}$; f) $u(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2}+2$;

g) $u(x_1,x_2)=3\ln x_1+\ln x_2$; h) $u(x_1,x_2)=\ln(x_1+x_2)$; i) $u(x_1,x_2)=\cos(x_1x_2)$;

j) $u(x_1,x_2)=e^{\left(\ln\sqrt[4]{x_1x_2}\right)^3}$; k) $u(x_1,x_2)=2(x_1+x_2)^5$; l) $u(x_1,x_2)=x_1x_2+(x_1+x_2)^2$.

Które z tych funkcji opisują jedną i tę samą relację preferencji? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dla funkcji użyteczności

A) $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$, B) $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$, C) $u(x_1, x_2) = Ax_1^c x_2^d$, $A, c, d > 0$,

D) $u(x_1, x_2) = (1-a)\ln x_1 + a\ln x_2$, $a \in (0,1)$,

a) Wyznacz funkcję popytu konsumenta kierującego się daną funkcją użyteczności oraz wyznacz wszystkie jej charakterystyki (popyt krańcowy prosty, popyt krańcowy krzyżowy, elastyczność cenową prostą, elastyczność cenową krzyżową, popyt krańcowy względem dochodu, elastyczność względem dochodu).

b) Znajdź pośrednią funkcję użyteczności $v(p, I)$. Korzystając z tożsamości Roy'a wyznacz funkcję popytu konsumpcyjnego $\varphi(p, I)$.

c) Sprawdź, czy funkcje $\varphi(p, I)$ i $v(p, I)$ są dodatnio jednorodne stopnia zero.

d) Sprawdź, czy krańcowa stopa substytucji towaru pierwszego przez drugi w optymalnym koszyku jest równa stosunkowi cen tych towarów.

e) Sprawdź, czy krańcowa użyteczność dochodu w optymalnym koszyku, czyli $\frac{\partial v(p, I)}{\partial I}$ jest równa $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \frac{1}{p_i}$ dla $i = 1, 2$.

f) Wyznacz funkcję kompensacyjnego popytu $f(p, u)$ oraz funkcję wydatków konsumenta $e(p, u)$.