Ekonomia matematyczna

Dr Wioletta Nowak, p. 205C

wioletta.nowak@uwr.edu.pl

http://prawo.uni.wroc.pl/user/12141/students-resources

Sylabus

Matematyczna teoria popytu

- Ograniczenie budżetowe.
- Preferencje konsumenta. Krzywe obojętności.
- Funkcja użyteczności jako liczbowa charakterystyka relacji preferencji konsumenta.
- Optymalny koszyk dóbr i warunki jego istnienia.

Sylabus

Matematyczna teoria popytu

- Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji.
- Funkcja popytu konsumenta i jej własności.
- Funkcja kompensacyjnego popytu.
- Matematyczna teoria produkcji.
- Podstawowe funkcje produkcji i ich własności.

Sylabus

Matematyczna teoria producenta

- Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej – strategia długo- i krótkookresowa.
- Funkcje: popytu i warunkowego popytu na czynniki produkcji, zysku, kosztów produkcji, podaży produktu i ich własności.
- Przedsiębiorstwo w warunkach monopolu.
- Modele oligopolu.

Literatura podstawowa

- **Malaga K.,** Mikroekonomia. Oswajanie z matematyką, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa, 2012.
- Podstawy ekonomii matematycznej. Materiały do ćwiczeń, E. Panek (red.), Wyd. AE, Poznań, 2002.
- Tokarski T., Matematyczne modele przedsiębiorstwa, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2008.

Literatura uzupełniająca

- **Chiang A.C.,** Podstawy ekonomii matematycznej, PWE, Warszawa, 1994.
- **Chiang A.C.,** Elementy dynamicznej optymalizacji, WSHiFM, Warszawa, 2002.

Pojęcia wstępne

- **Koszyk dóbr** – nieujemny wektor postaci

$$x = (x_1, x_2)$$

gdzie x_i ilość i-tego dobra w koszyku

$i = 1, 2$ $\quad x \in \Re^2_+$

- **Wektor cen** $p = (p_1, p_2)$ $\quad p_i > 0$

- **Dochód konsumenta** $I > 0$

Zbiór budżetowy – ograniczenie budżetowe

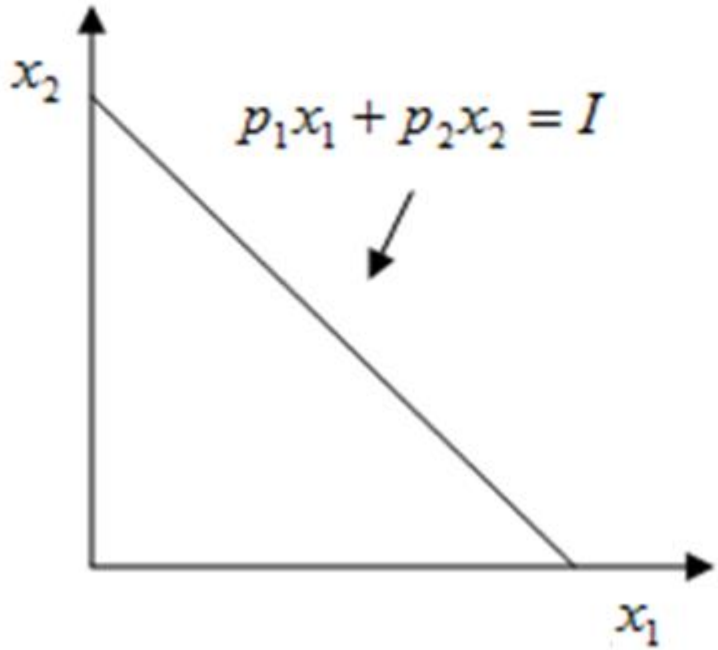
- Zbiór budżetowy – zbiór wszystkich koszyków, których wartość, przy danych cenach dóbr, nie przekracza dochodu konsumenta.

$$\langle p, x \rangle \leq I$$

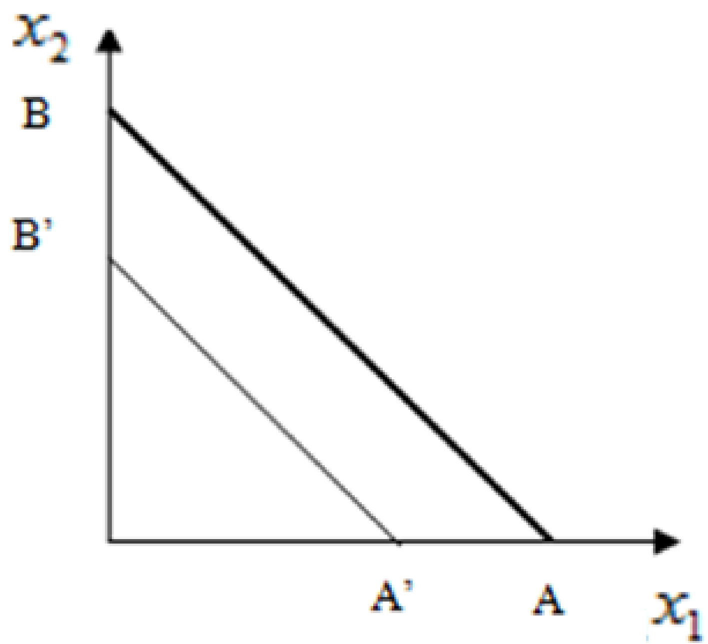
$$p = (p_1, p_2) \qquad x = (x_1, x_2)$$

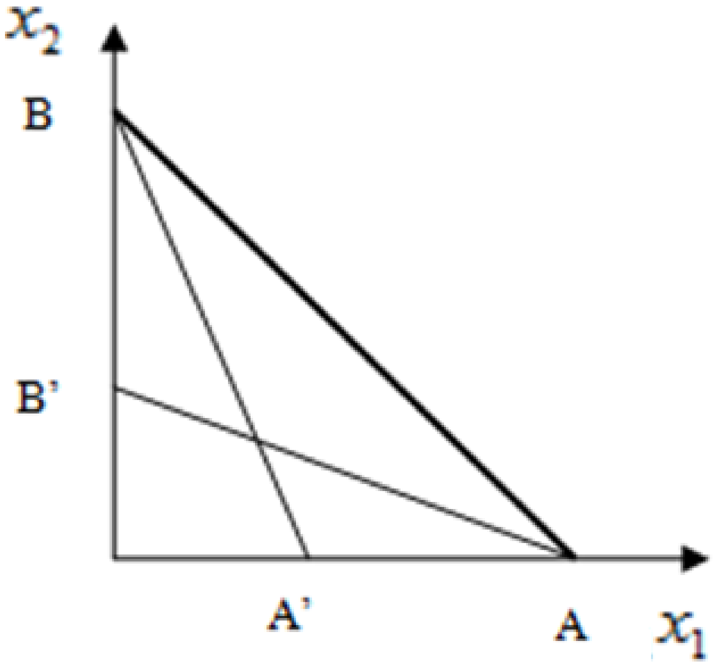
$$\sum_{i=1}^{2} p_i \cdot x_i \leq I \qquad p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq I$$

Linia ograniczenia budżetowego



Zmiany linii ograniczenia budżetowego





Relacja preferencji konsumenta

- **Relacja indyferencji (obojętności)**

$$x \sim y$$

- **Relacja silnej preferencji**

$$x \succ y$$

- **Relacja słabej preferencji**

$$x \succsim y$$

Własności relacji preferencji

- Relacja słabej preferencji jest zupełna

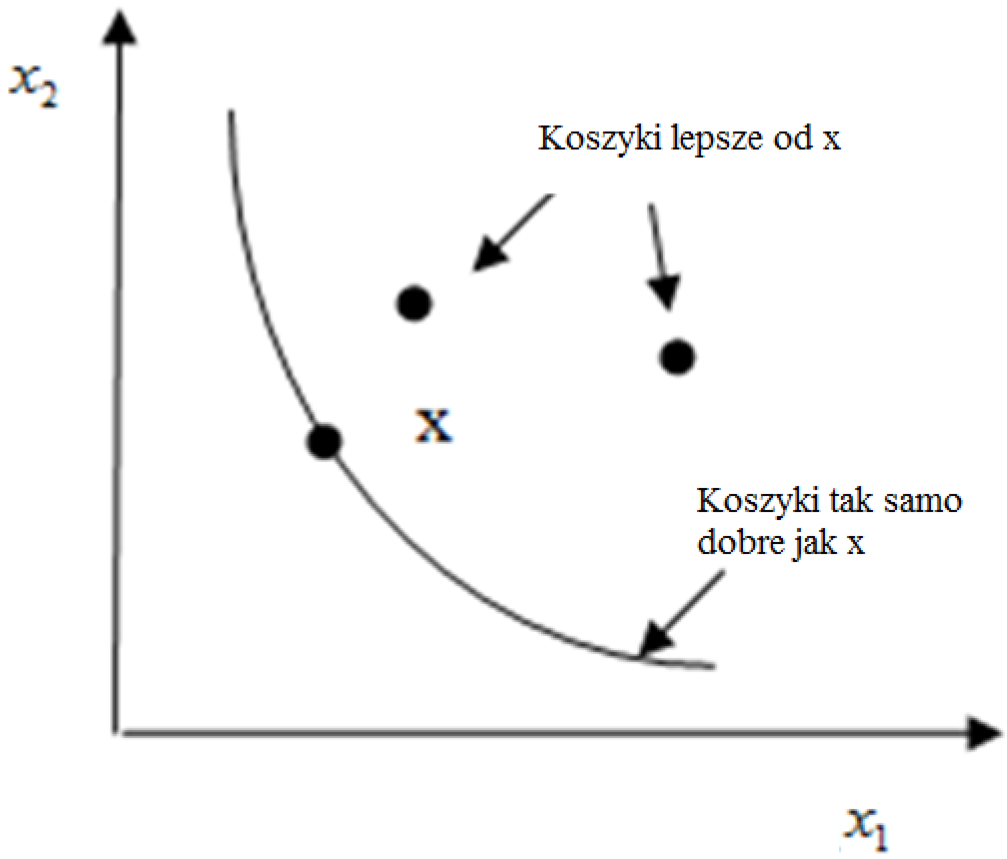
$$\forall x, y \in X \qquad x \succsim y \vee y \succsim x$$

- Relacja słabej preferencji jest przechodnia

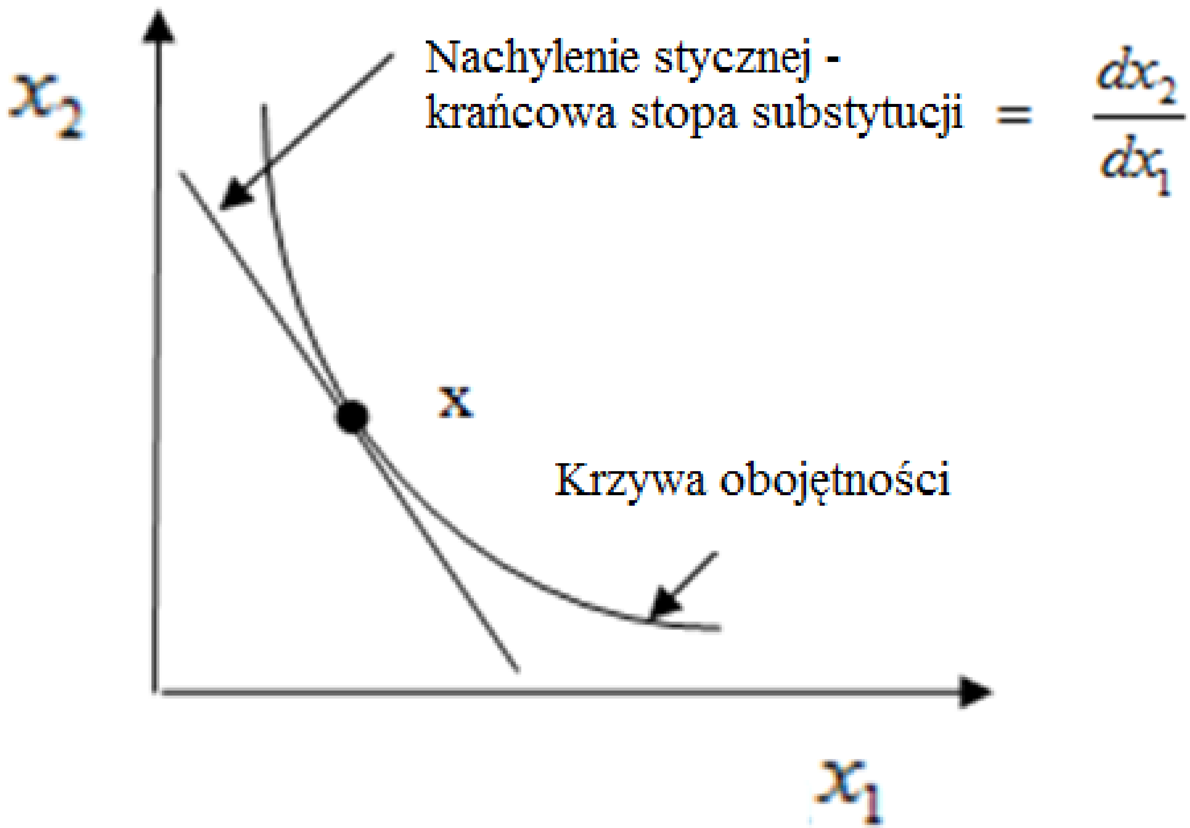
$$\forall x, y, z \in X \qquad x \succsim y \wedge y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

- Relacja słabej preferencji jest zwrotna
- Relacja słabej preferencji jest ciągła.

Krzywe obojętności

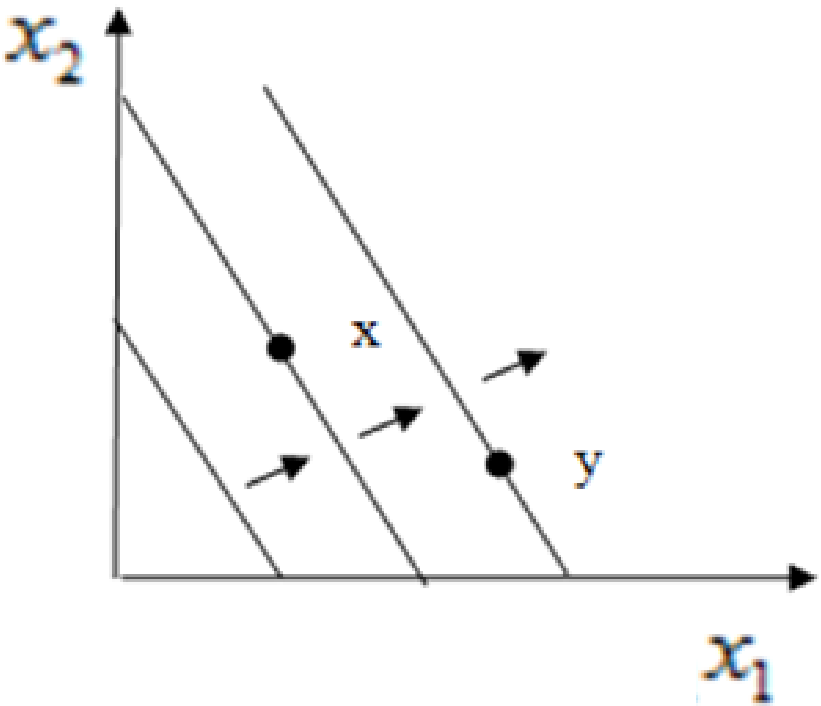


Krańcowa stopa substytucji



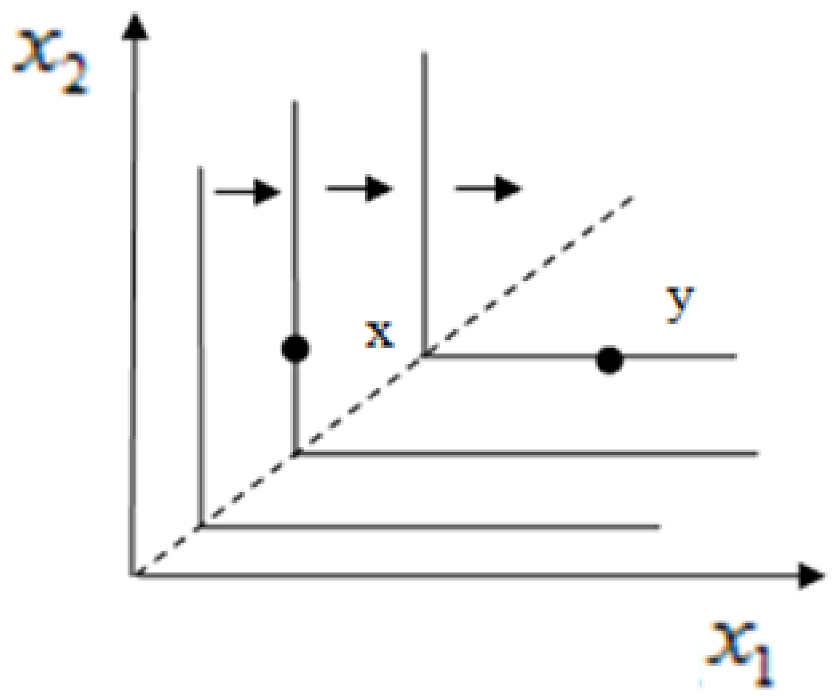
Krzywe obojętności - przykłady

- Dobra substytucyjne



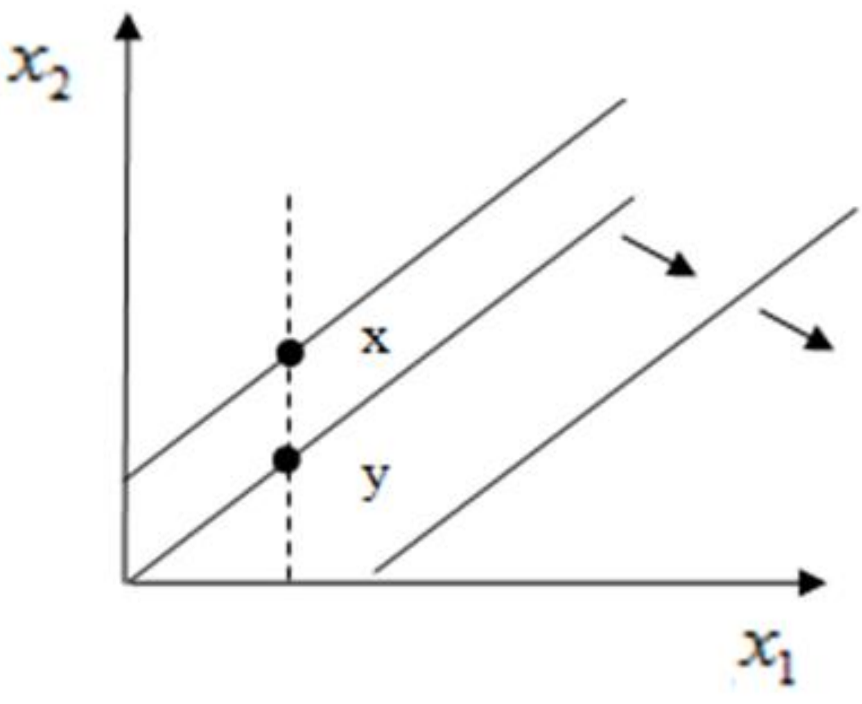
Krzywe obojętności - przykłady

- Dobra komplementarne



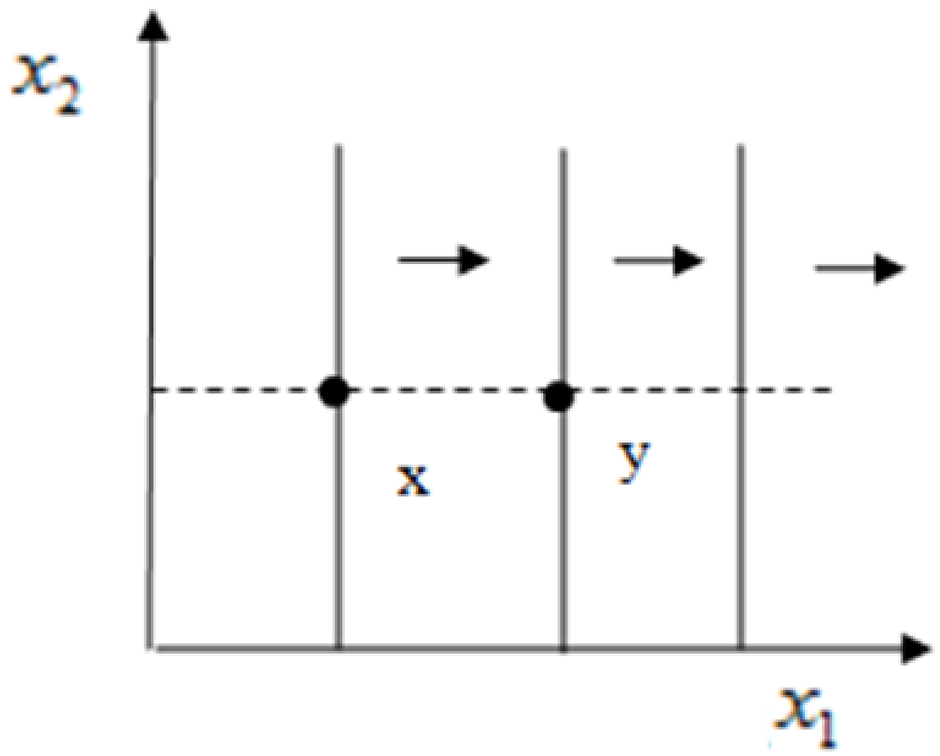
Krzywe obojętności - przykłady

- Dobro 2 - antydobro



Krzywe obojętności - przykłady

- Dobro 2 – dobro neutralne



Funkcja użyteczności

$$u(x) > u(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y\,,$$

$$u(x) = u(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y\,,$$

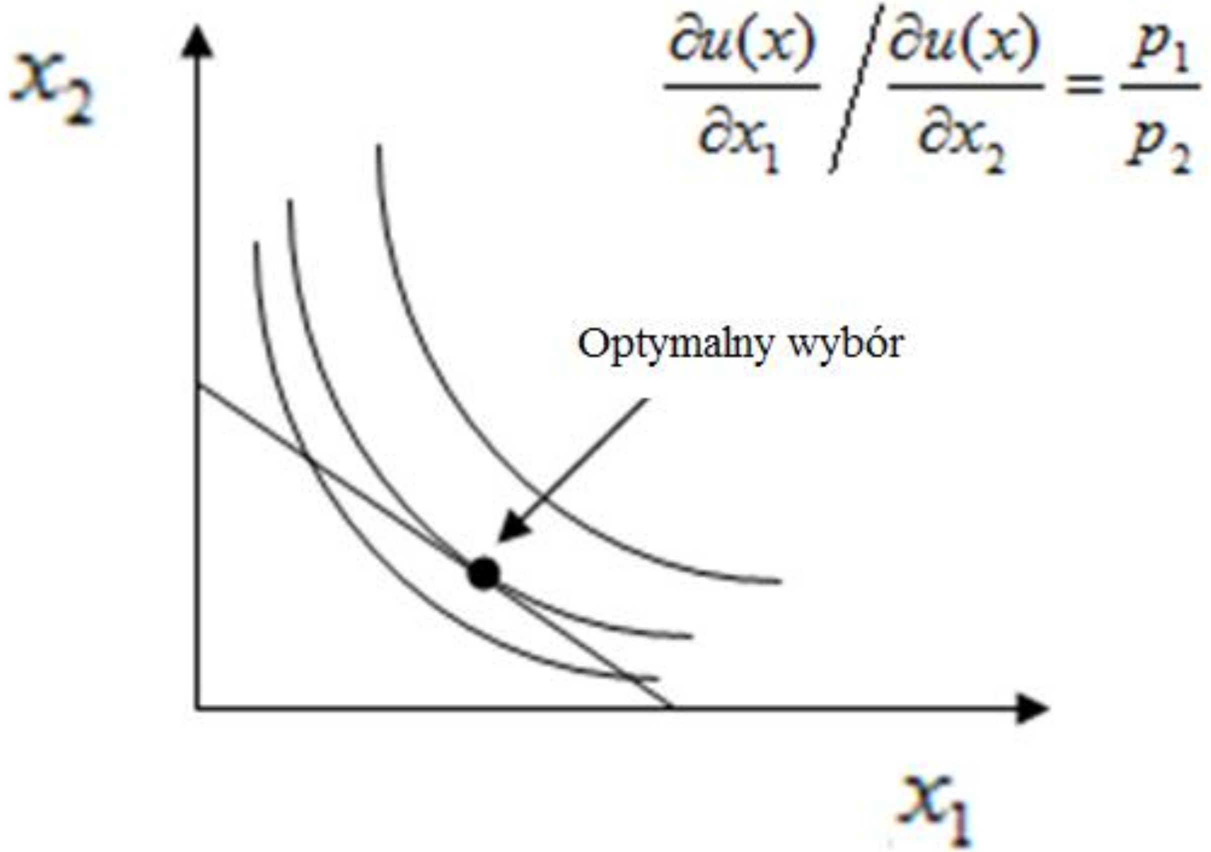
$$u(x) \geq u(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succsim y\,.$$

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d\,,\ \ c, d > 0$$

$$u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2\,,\ \ a_1, a_2 > 0$$

$$u(x_1, x_2) = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2\}\,,\ \ a_1, a_2 > 0$$

Optymalny wybór



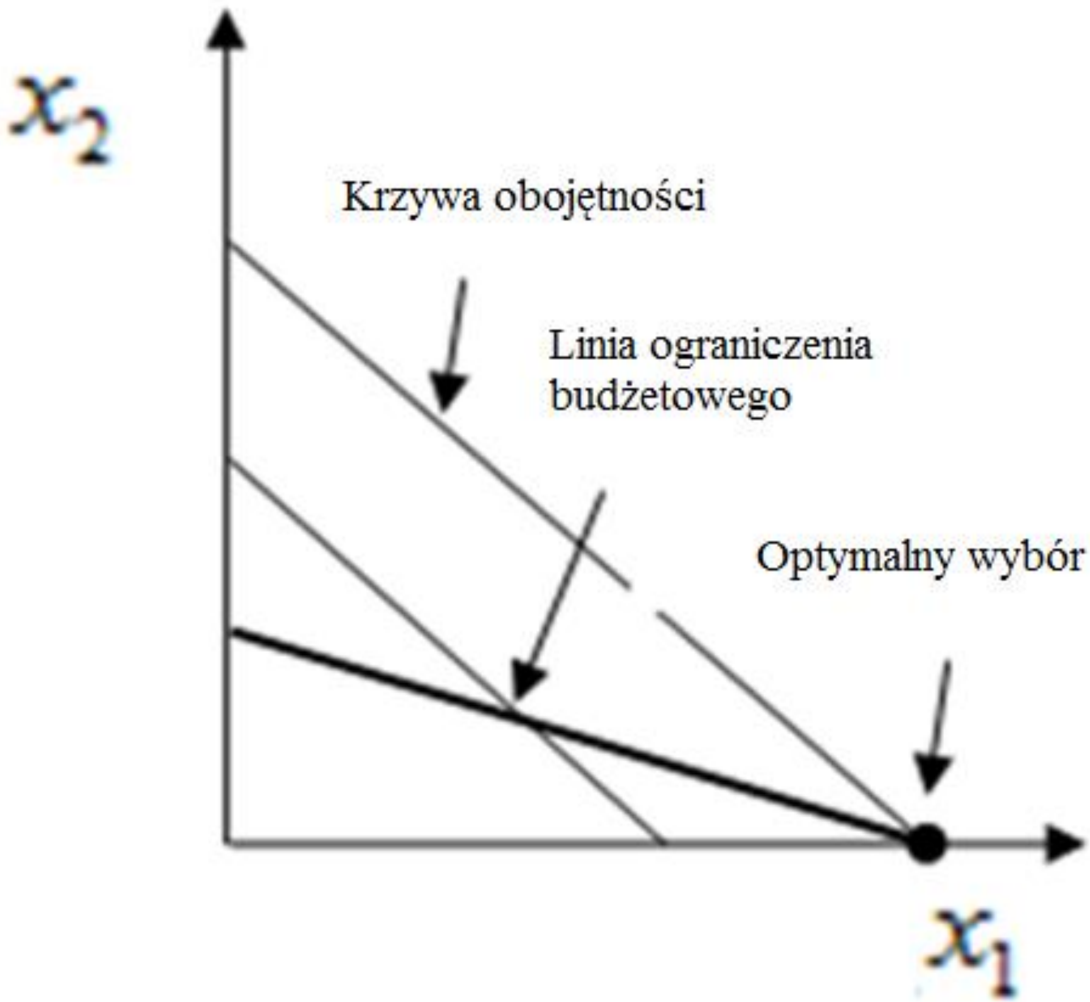
Przykład

Znajdź optymalny koszyk (x_1, x_2), jeśli funkcja użyteczności

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 + 2\right)(x_2 + 4),$$

a ograniczenie budżetowe ma postać $2x_1 + x_2 = 8$.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 + 4}{x_1 + 4} = \dfrac{2}{1} \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \qquad (1, 6)$$



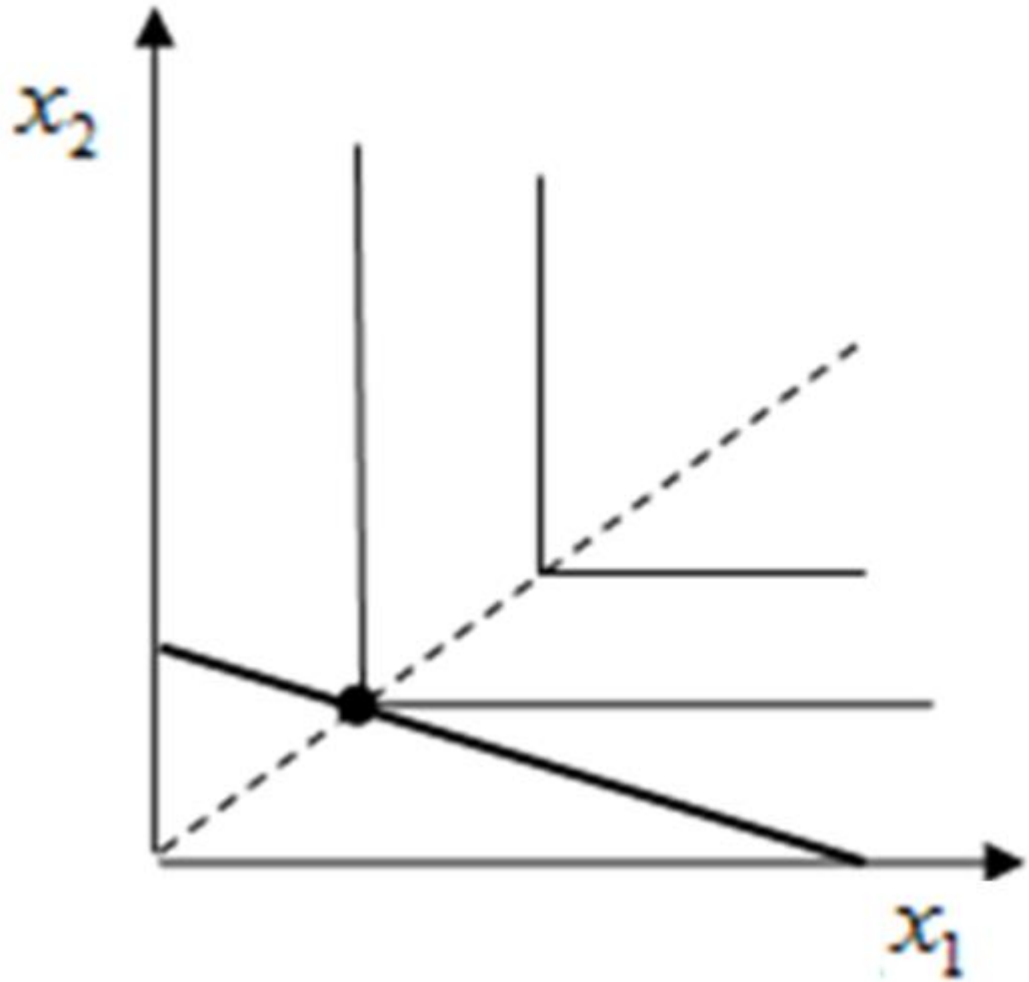
x_2
Krzywa obojętności
Linia ograniczenia budżetowego
Optymalny wybór
x_1

Przykład

Znajdź optymalny koszyk (x_1, x_2), jeśli funkcja użyteczności

a) $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, b) $u(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$,

a ograniczenie budżetowe ma postać $2x_1 + x_2 = 8$.


x_2
x_1

Przykład

Znajdź optymalny koszyk (x_1, x_2),

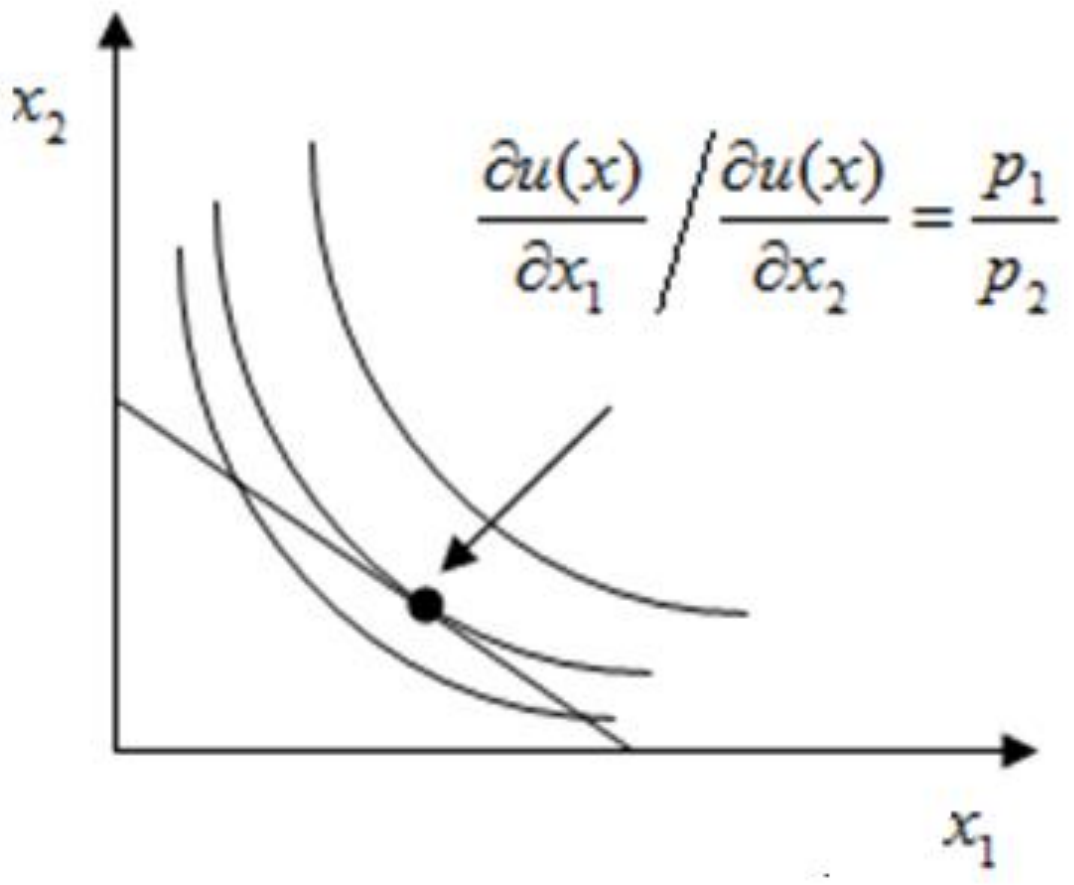
jeśli $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\}$,

a ograniczenie budżetowe ma postać $2x_1 + 3x_2 = 10$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases} \qquad (2, 2)$$

- Maksymalizacja funkcji użyteczności – metoda Lagrange’a
- Własności funkcji popytu
- Pośrednia funkcja użyteczności – tożsamość Roya
- Minimalizacja wydatków
- Funkcja popytu Hicksa (funkcja popytu kompensacyjnego)
- Funkcja wydatków

Optymalny wybór – dobra normalne



Maksymalizacja funkcji użyteczności

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

Metoda Lagrange'a

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda\left(I - p_1 x_1 - p_2 x_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \left(I - p_1 x_1 - p_2 x_2\right) = 0.$$

Funkcja popytu

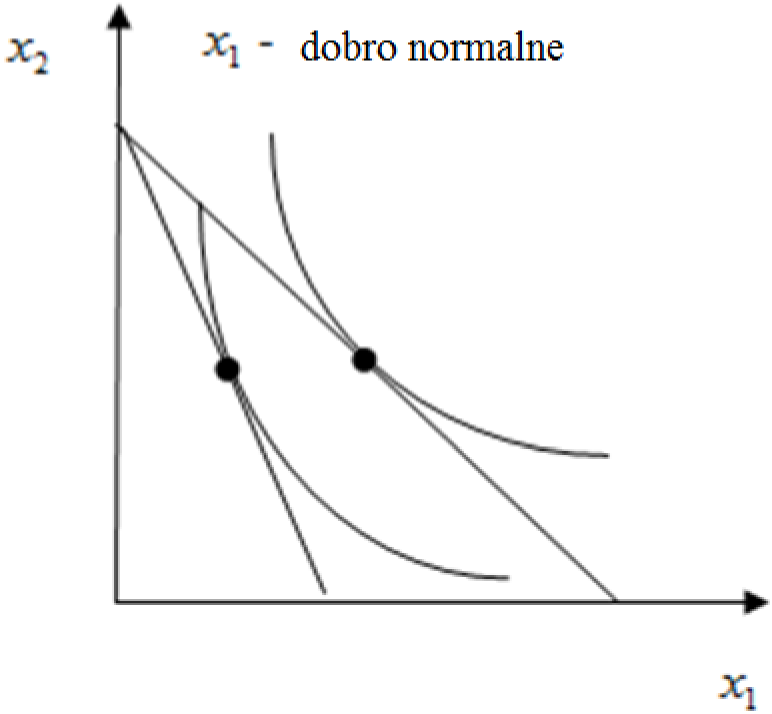
$$\varphi: \quad \Re_+^3 \rightarrow \Re_+^2$$

$$\varphi: \quad (p, I) \rightarrow \varphi(p, I)$$

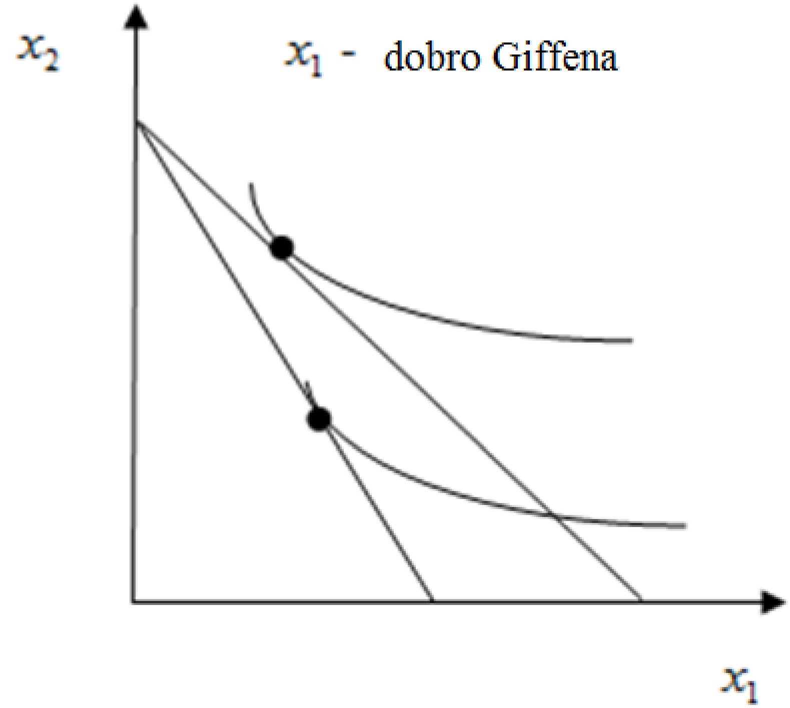
$$\varphi = (\varphi_1(p_1, p_2, I), \varphi_2(p_1, p_2, I))$$

Popyt krańcowy	Elastyczność popytu
$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_i}$	$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_i} \times \dfrac{p_i}{\varphi_i}$
$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_j}$	$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_j} \times \dfrac{p_j}{\varphi_i}$
$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial I}$	$\dfrac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial I} \times \dfrac{I}{\varphi_i}$

$$\frac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_i} \times \frac{p_i}{\varphi_i} \equiv \frac{d\ln(\varphi_i(p,I))}{d\ln(p_i)}, \qquad i = 1,2 .$$



$$\frac{\partial \varphi_1(p,I)}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{\varphi_1} < 0$$



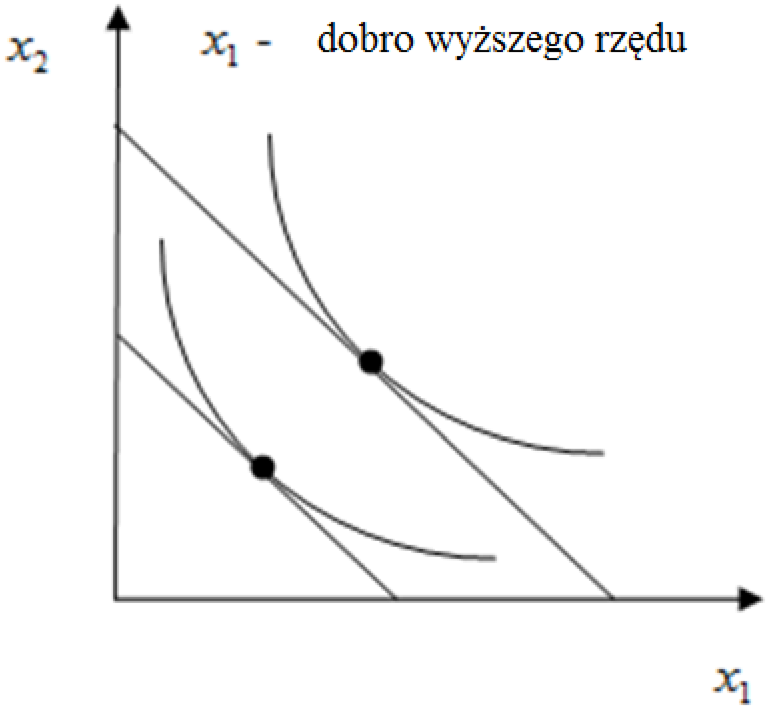
$$\frac{\partial \varphi_1(p,I)}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{\varphi_1} > 0$$

- Dobra substytucyjne

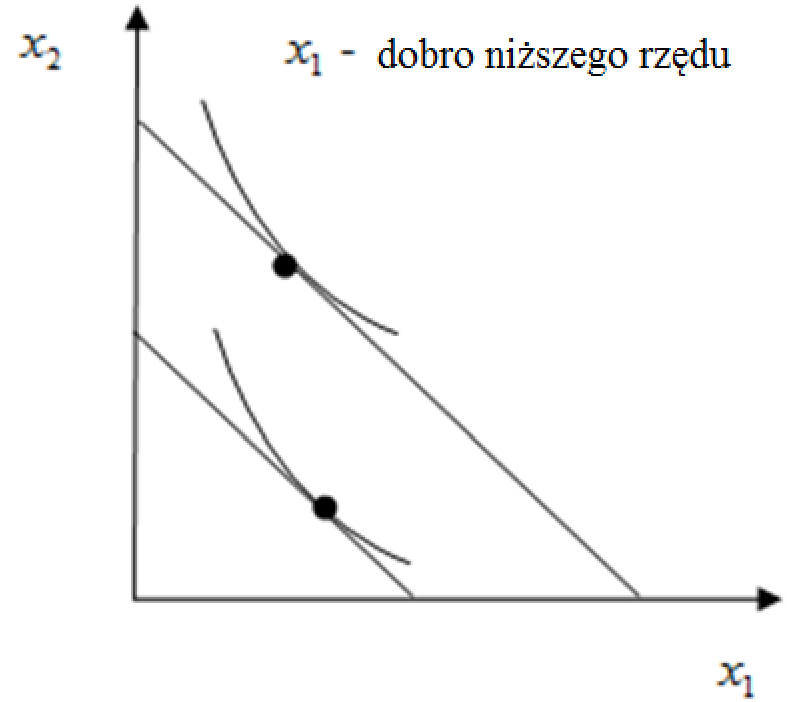
$$\frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial p_j} > 0 \qquad \frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{\varphi_i} > 0$$

- Dobra komplementarne

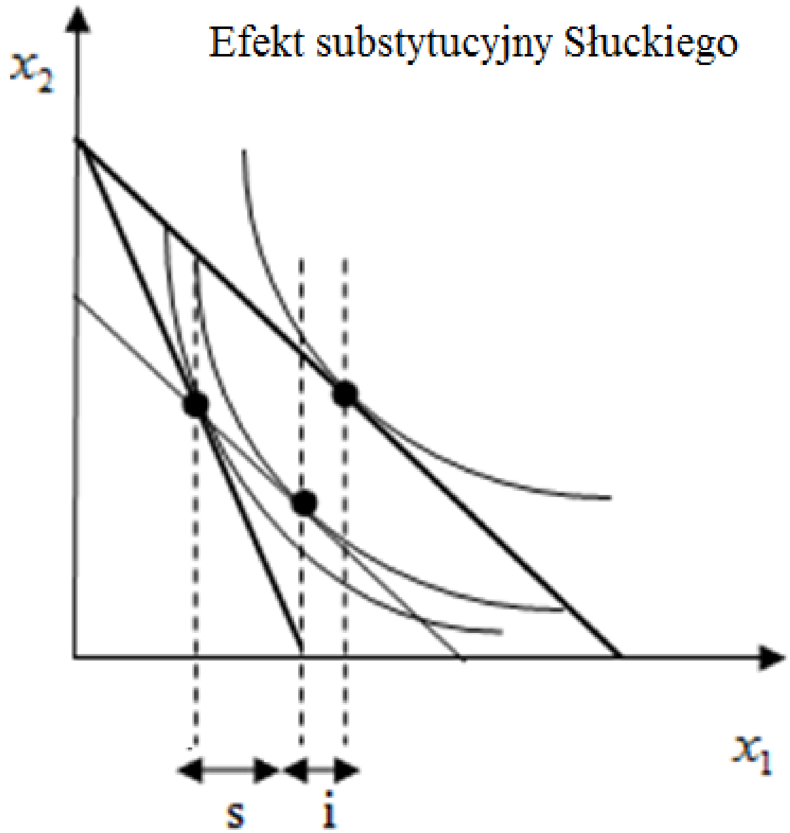
$$\frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial p_j} < 0 \qquad \frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{\varphi_i} < 0$$

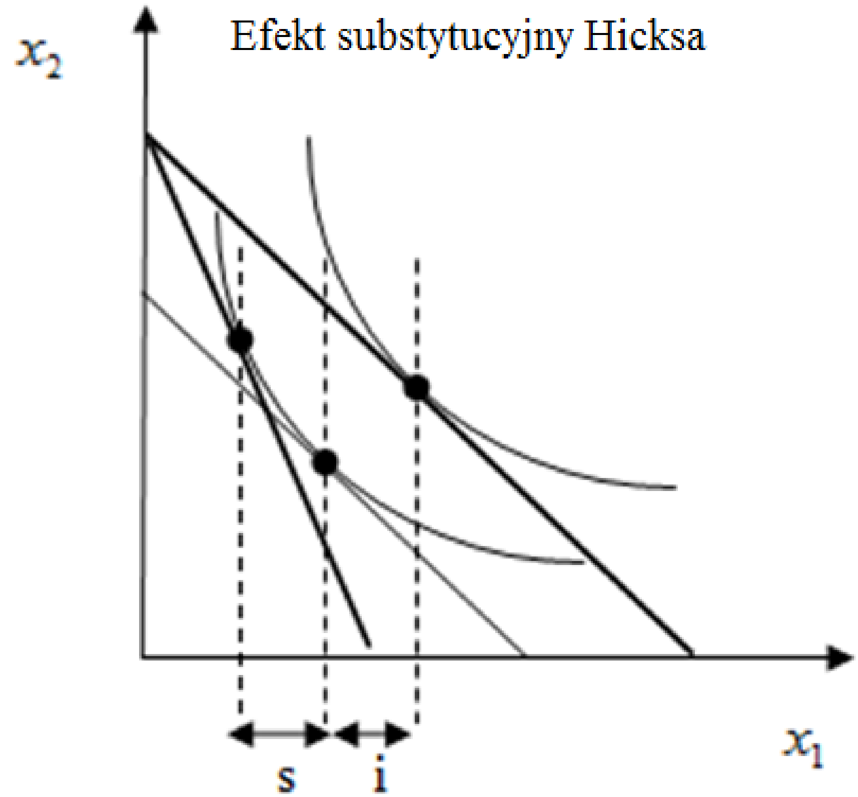


$$\frac{\partial \varphi_1(p, I)}{\partial I} \times \frac{I}{\varphi_1} > 0$$



$$\frac{\partial \varphi_1(p, I)}{\partial I} \times \frac{I}{\varphi_1} < 0$$


Efekt substytucyjny Słuckiego
x_2
x_1
s
i


Efekt substytucyjny Hicksa
x_2
x_1
s
i

Pośrednia funkcja użyteczności

$$v = u(\varphi(p, I))$$

1. $v(p, I)$ nierosnąca względem p ($p' \geq p$, $v(p', I) \geq v(p, I)$)
2. $v(p, I)$ niemalejąca względem I;
3. $v(p, I)$ homogeniczna stopnia 0 względem (p, I);
4. $v(p, I)$ wklęsła względem p;
5. $v(p, I)$ ciągła $p > 0$, $I > 0$.

Tożsamość Roy'a

$$\varphi_i(p,I) = -\frac{\partial v(p,I)/\partial p_i}{\partial v(p,I)/\partial I} \qquad\qquad i = 1,2$$

Minimalizacja wydatków

$$\min_{x_1, x_2} \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$$

$$u(x_1, x_2) = u$$

- Własności funkcji kompensacyjnego popytu

$$\frac{\partial f_i(p,u)}{\partial p_i} < 0, \qquad \forall p > 0$$

$$\frac{\partial f_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_j(p,u)}{\partial p_i}$$

- Funkcja wydatków

$$e(p,u) = \sum_{i=1}^{2} p_i f_i(p,u)$$

Lemat Sheparda

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i} = f_i(p, u) \quad , \quad i = 1, 2$$

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},\ a \in (0,1)$$

$$\varphi(p, I) = \left(\frac{aI}{p_1}, \frac{(1-a)I}{p_2} \right) \qquad v(p, I) = \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{(1-a)}{p_2} \right)^{1-a} I$$

$$f(p, u) = \left(\left(\frac{a}{1-a} \times \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \times u, \left(\frac{1-a}{a} \times \frac{p_1}{p_2} \right)^a \times u \right)$$

$$e(p, u) = \frac{p_1^a p_2^{1-a} u}{a^a (1-a)^{1-a}}$$

$e(p, u(0)) = 0$,

$e(p, u)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 1 względem cen p,

$e(p, u)$ jest wklęsła względem cen p,

$\varphi(p, I) = f(p, v(p, I))$,

$f(p, u) = \varphi(p, e(p, u))$,

$e(p, v(p, I)) = I$,

$v(p, e(p, u)) = u$,

$$\frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_i(p, u)}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial I} \cdot \varphi_j(p, I).$$

Równanie Słuckiego

$$f_i(p,u) = \varphi_i(p, e(p,u))$$

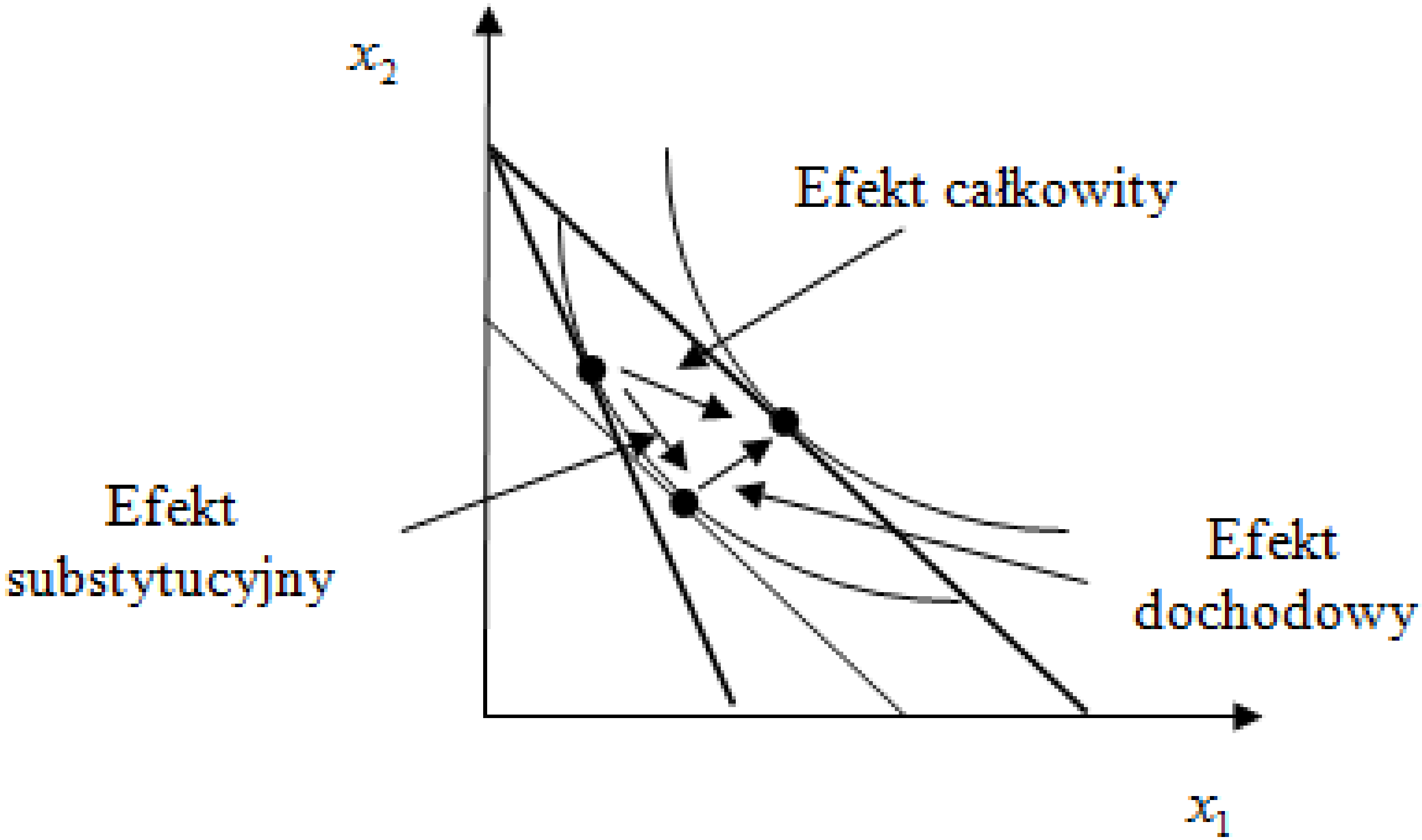
$$\frac{\partial f_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial \varphi_i(p,e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial \varphi_i(p,e(p,u))}{\partial e(p,u)} \times \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}$$

$$u = v(p,I), \qquad e(p,u) = e(p, v(p,I)) = I$$

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = f_j(p,u) = f_j(p, v(p,I)) = \varphi_j(p,I)$$

$$\frac{\partial f_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_j} + \frac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial I} \times \varphi_j(p,I)$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_i(p,u)}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_i(p,I)}{\partial I} \times \varphi_j(p,I)}$$


x_2
Efekt całkowity
Efekt
substytucyjny
Efekt
dochodowy
x_1