Ekonomia matematyczna

Dr Wioletta Nowak

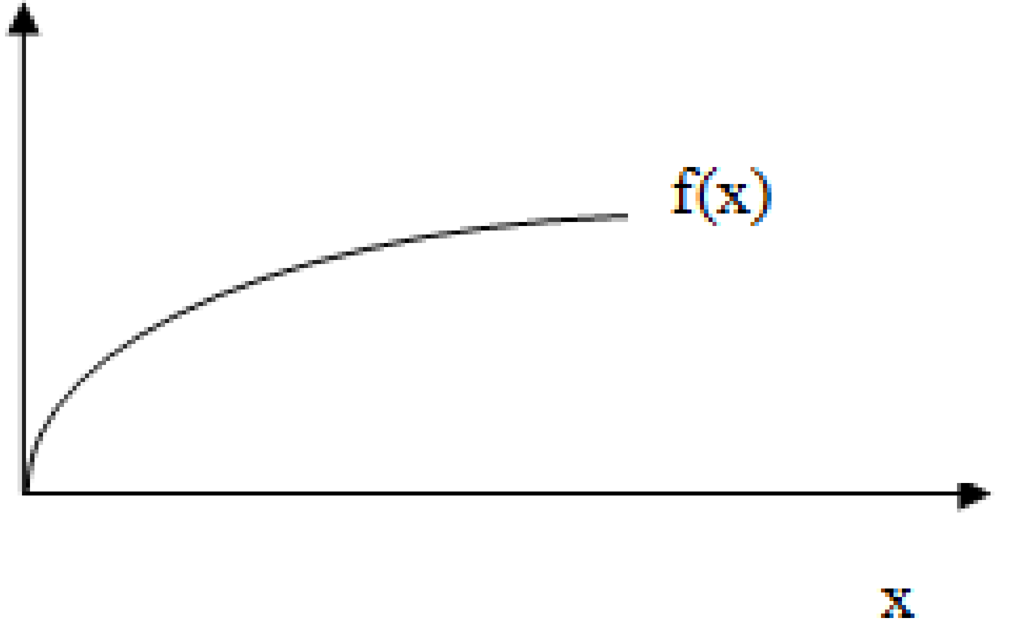
Wykład 3-4

- Podstawowe funkcje produkcji i ich własności.
- Neoklasyczna teoria przedsiębiorstwa.
- Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej – strategia długookresowa i krótkookresowa.
- Funkcje: popytu i warunkowego popytu na czynniki produkcji, zysku, kosztów produkcji, podaży produktu i ich własności.

Funkcja produkcji

- Funkcja produkcji $y = f(x_1, x_2)$

gdzie x_1 - kapitał x_2 - siła robocza



- Krańcowa efektywność kapitału

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1}$$

- Krańcowa wydajność pracy

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2}$$

- Elastyczność produkcji względem kapitału

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} \equiv \frac{d \ln y}{d \ln x_1}$$

- Elastyczność produkcji względem pracy

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y}$$

- Krańcową stopa substytucji kapitału przez pracę

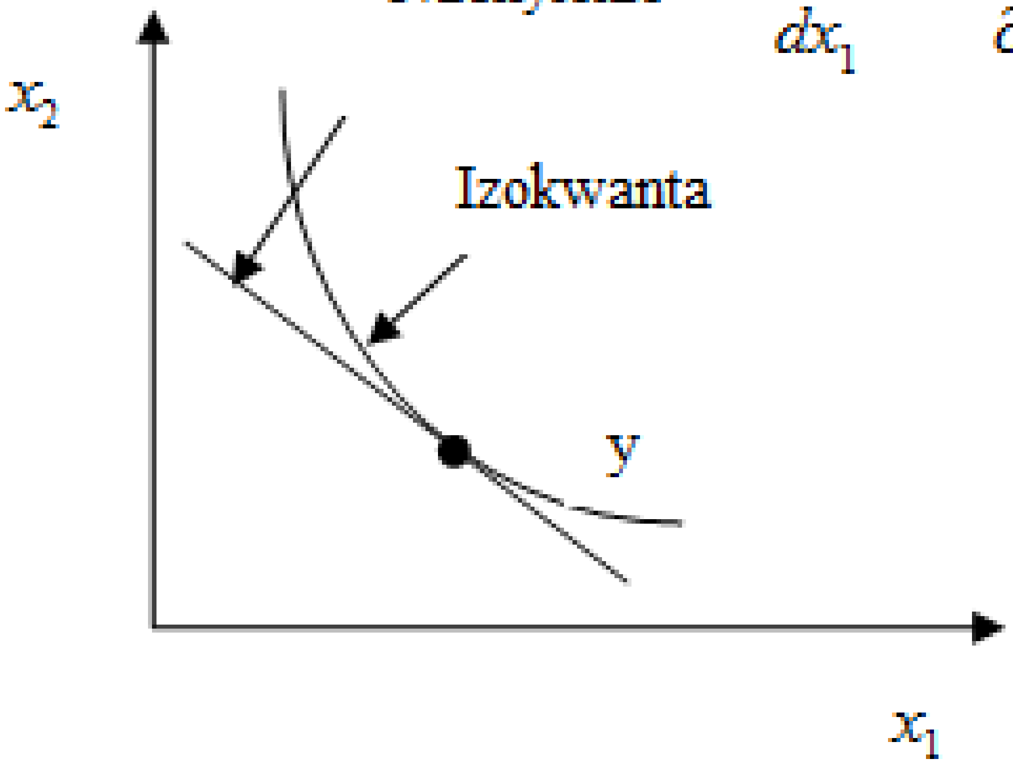
$$\sigma_{12} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2}$$

- Krańcową stopa substytucji pracy przez kapitał

$$\sigma_{21} = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1}$$

Izokwanta

$$\text{Nachylenie} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$



- Elastyczność substytucji kapitału przez pracę

$$\varepsilon_{12} = \sigma_{12} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

- Elastyczność substytucji pracy przez kapitał

$$\varepsilon_{21} = \sigma_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\varepsilon_{12}}$$

- Elastyczność krańcowej stopy substytucji pracy przez kapitał względem technicznego uzbrojenia pracy

$$\varepsilon_{21}^{\sigma} = \frac{\partial|\sigma_{21}|}{\partial(x_1/x_2)} \cdot \frac{x_1/x_2}{|\sigma_{21}|} = \frac{d\ln|\sigma_{21}|}{d\ln(x_1/x_2)}$$

Korzyści skali

- Stałe korzyści skali

$$f(tx_1, tx_2) = t \cdot f(x_1, x_2)$$

- Rosnące korzyści skali

$$f(tx_1, tx_2) > t \cdot f(x_1, x_2)$$

- Malejące korzyści skali

$$f(tx_1, tx_2) < t \cdot f(x_1, x_2)$$

Elastyczność produkcji względem skali nakładów

$$\varepsilon_t = \lim_{t\to 1} \frac{df\left(tx_1, tx_2\right)}{dt} \cdot \frac{t}{f\left(tx_1, tx_2\right)}$$

- Stałe korzyści skali $\varepsilon_t = 1$
- Rosnące korzyści skali $\varepsilon_t > 1$
- Malejące korzyści skali $\varepsilon_t < 1$

Funkcja produkcji CES

$$y = A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$y = A\left(a \cdot x_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$A > 0, \quad a \in (0,1), \quad 0 \neq \rho > -1$$

$$\boxed{y = A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = aA^{\rho}\left(\frac{y}{x_1}\right)^{1-\rho} \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = (1-a)A^{\rho}\left(\frac{y}{x_2}\right)^{1-\rho}$$

$$\varepsilon_1 = aA^{\rho}\left(\frac{x_1}{y}\right)^{\rho} \qquad \varepsilon_2 = (1-a)A^{\rho}\left(\frac{x_2}{y}\right)^{\rho}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$$

$$\boxed{y = A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho} \qquad \sigma_{21} = -\frac{1-a}{a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1-\rho}$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho} \qquad \varepsilon_{21} = -\frac{1-a}{a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}$$

$$\boxed{y = A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$\varepsilon_{21}^{\sigma} = \frac{d\ln\left|\sigma_{21}\right|}{d\ln\left(x_1/x_2\right)} = 1-\rho$$

$$\left|\sigma_{21}\right| = \frac{1-a}{a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1-\rho}$$

$$\ln\left|\sigma_{21}\right| = \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + (1-\rho)\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$\boxed{y = A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$\varepsilon_t = 1$$

$$\lim_{\rho \to 0} A\left(a \cdot x_1^{\rho} + (1-a)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = A x_1^{a} x_2^{1-a}$$

$$\lim_{\rho\to 0} y = A\cdot e^{\lim\limits_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right)}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\ln\left(ax_1^{\rho}+(1-a)x_2^{\rho}\right)}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\ln\left(ax_1^{\rho}+(1-a)x_2^{\rho}\right)\right)}{\frac{d\rho}{d\rho}}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{d}{d\rho}\left(ax_1^{\rho}+(1-a)x_2^{\rho}\right)}{ax_1^{\rho}+(1-a)x_2^{\rho}}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right)=\lim_{\rho\to 0}\frac{a\cdot x_1^{\rho}\cdot\ln x_1+(1-a)\cdot x_2^{\rho}\cdot\ln x_2}{ax_1^{\rho}+(1-a)x_2^{\rho}}$$

$$\frac{dx_1^{\rho}}{d\rho}=x_1^{\rho}\cdot\ln x_1$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{y}{A}\right)=\ln\left(x_1^{a}x_2^{1-a}\right)$$

Maksymalizacja zysku – doskonała konkurencja (długi okres)

$$\max_{x_1, x_2} \pi(x_1, x_2) = p \cdot f(x_1, x_2) - (v_1 x_1 + v_2 x_2)$$

$$\max_{y} \pi(y) = p \cdot y - c(y)$$

$$\max_{x_1, x_2} \pi(x_1, x_2) = p \cdot f(x_1, x_2) - (v_1 x_1 + v_2 x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \pi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = v_1 \\[2ex] p \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

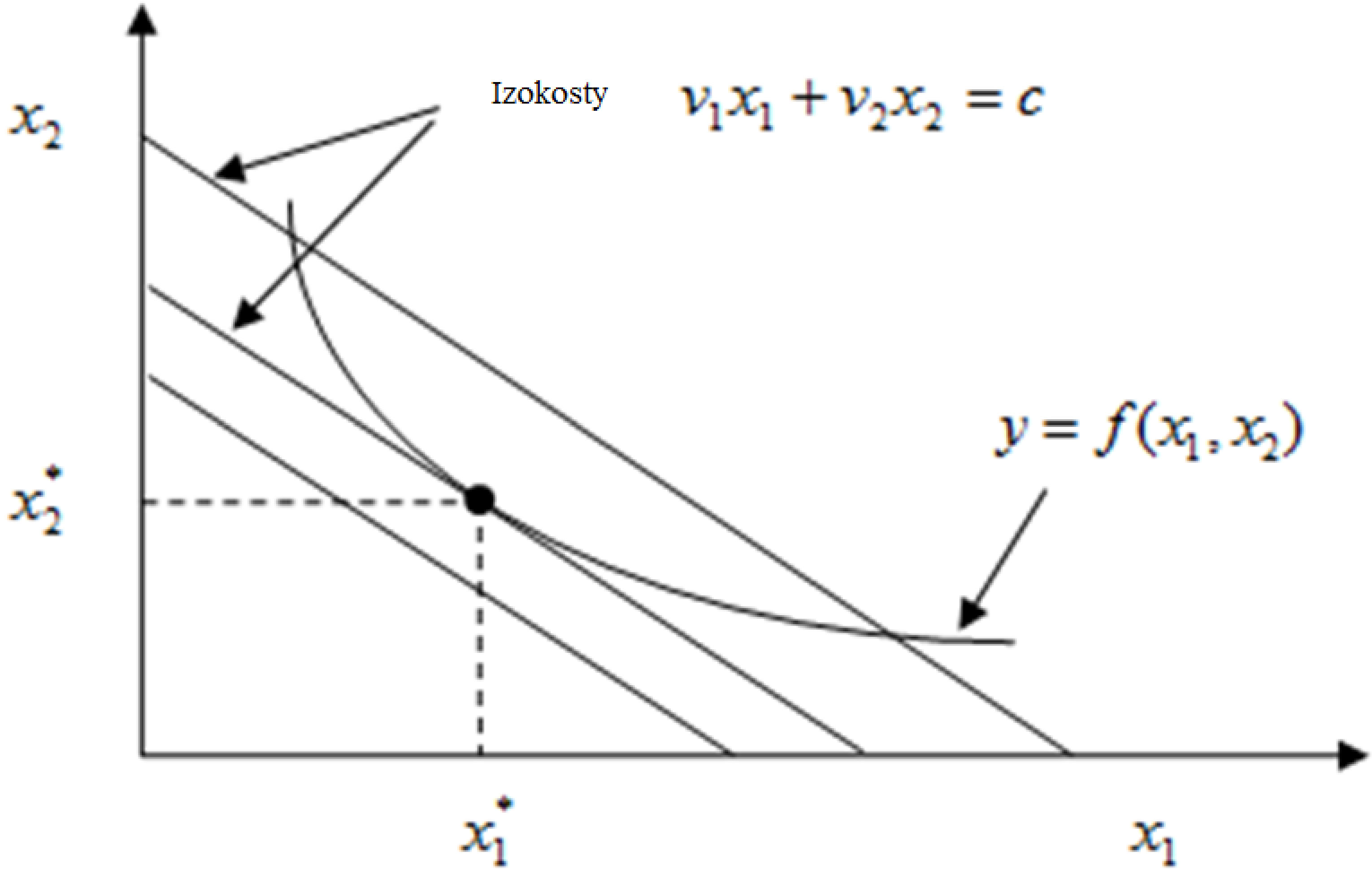
Minimalizacja kosztów

$$\min_{x_1, x_2} v_1 x_1 + v_2 x_2$$

$$y = f(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \lambda(y - f(x_1, x_2))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \lambda \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ v_2 = \lambda \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ y = f(x_1, x_2) \end{cases}$$


Izokosty
$v_1x_1 + v_2x_2 = c$
x_2
$y = f(x_1, x_2)$
x_2^*
x_1^*
x_1

$$\max_{y} \ \pi(y) = p \cdot y - c(y)$$

$$\frac{d\pi(y)}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{dc(y)}{dy} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}$$

$$y = 4x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{x_1, x_2} \pi(x_1, x_2) = 4px_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}} - (v_1 x_1 + v_2 x_2)$$

- $\bar{x}_1 = \dfrac{4p^4}{v_1^2 v_2^2}, \qquad \bar{x}_2 = \dfrac{8p^4}{v_1 v_2^3}$
- $\bar{y} = \dfrac{16p^3}{v_1 v_2^2}$
- $\pi(p, v) = \dfrac{4p^4}{v_1 v_2^2}$

$$\min_{x_1,x_2} \; v_1x_1 + v_2x_2$$

$$y = 4x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

- $x_1^* = \left(\frac{v_2}{2v_1}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$, $x_2^* = \left(\frac{2v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$

- $c(v,y) = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot v_1^{\frac{1}{3}} \cdot v_2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$

$$\max_{y}\ \pi(y) = p \cdot y - 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot v_1^{\frac{1}{3}} \cdot v_2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$$

- $$\bar{y} = \frac{16p^3}{v_1 v_2^2}.$$