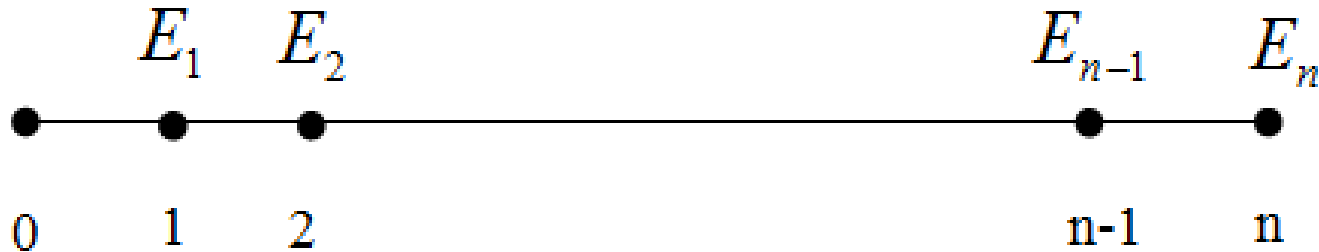


# **Arytmetyka finansowa**

## Wykład 2

Dr Wioletta Nowak

# Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych



**Wkłady z dołu**

$$K_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n + E_1(n-1)r + E_2(n-2)r + \dots + E_{n-1}r$$

**Wkłady z góry**

$$K_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n + E_1n \cdot r + E_2(n-1)r + \dots + E_n r$$

# Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych

jednakowe wkłady E

**Wkłady z dołu**

$$K_n = E \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n-1}{2} r \right)$$

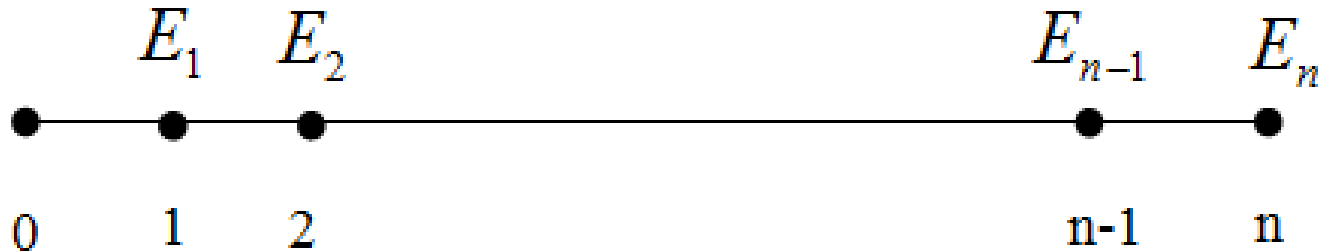
**Wkłady z góry**

$$K_n = E \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n+1}{2} r \right)$$

$$K_0 = E \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n \pm 1}{2} r \right) \frac{1}{1 + n \cdot r}$$

$$K_t = E \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n \pm 1}{2} r \right) \frac{1 + t \cdot r}{1 + n \cdot r} \quad t \in (0, n)$$

# Oprocentowanie złożone wkładów



**Wkłady z dołu**

$$K_n = E_1(1+r)^{n-1} + E_2(1+r)^{n-2} + \dots + E_{n-1}(1+r) + E_n$$

**Wkłady z góry**

$$K_n = E_1(1+r)^n + E_2(1+r)^{n-1} + \dots + E_n(1+r)$$

# Oprocentowanie złożone wkładów

jednakowe wkłady E

**Wkłady z dołu**

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

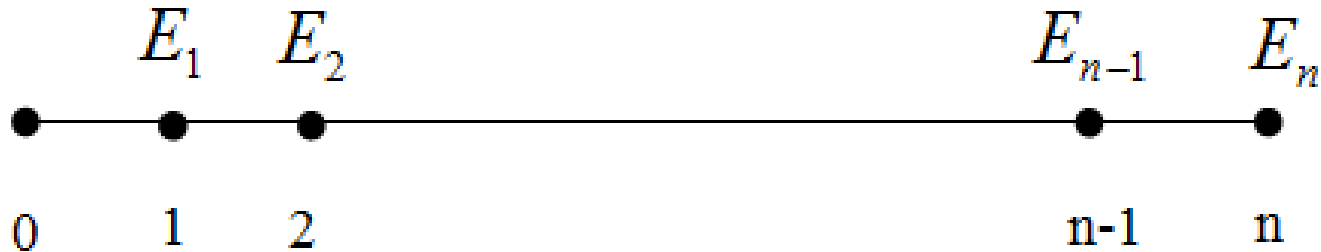
**Wkłady z góry**

$$K_n = E \cdot (1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

$$K_t = \frac{K_n}{(1+r)^{n-t}} \quad t \in (0, n)$$

# Oprocentowanie ciągle wkładów



## Wkłady z dołu

$$K_n = E_1 \cdot e^{(n-1)r} + E_2 \cdot e^{(n-2)r} + \dots + E_{n-1} \cdot e^r + E_n$$

## Wkłady z góry

$$K_n = E_1 \cdot e^{n \cdot r} + E_2 \cdot e^{(n-1)r} + \dots + E_n \cdot e^r$$

# Oprocentowanie ciągle wkładów

## jednakowe wkłady E

**Wkłady z dołu**

$$K_n = E \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

$$K_t = K_n \cdot e^{-(n-t) \cdot r} \quad t \in (0, n)$$

$$K_0 = E \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

**Wkłady z góry**

$$K_n = E \cdot e^r \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

$$K_0 = E \cdot e^r \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

## Przykład 1

- Przez ile lat należy wpłacać na początku każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.



## Przykład 1

$$E = 10$$

$$K_n = 100$$

$$r = 12\%$$

$$K_n = E \cdot (1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

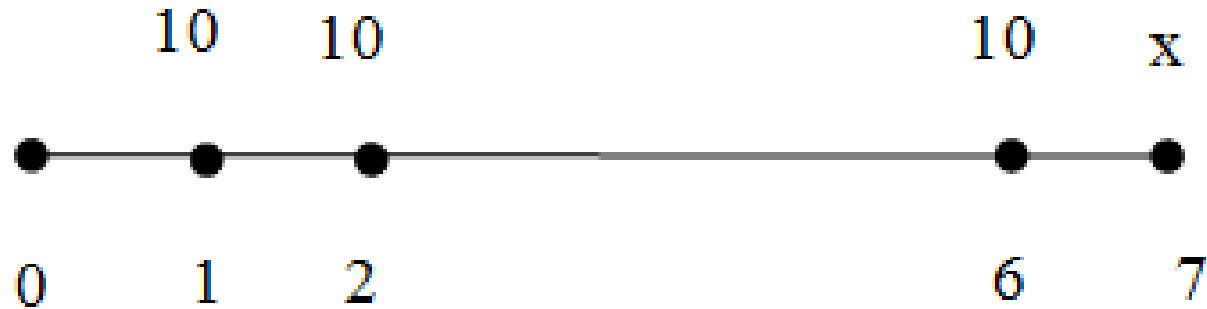
$$n = \frac{\ln\left(\frac{r \cdot K_n}{E \cdot (1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\frac{0.12 \cdot 100}{10 \cdot 1.12} + 1\right)}{\ln(1.12)}$$

$$n = 6.43$$

## Przykład 1

- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

## Przykład 1 - dodatkowa niepełna wpłata



$$K_6 = 90.89$$

$$K_6 + x = 100$$

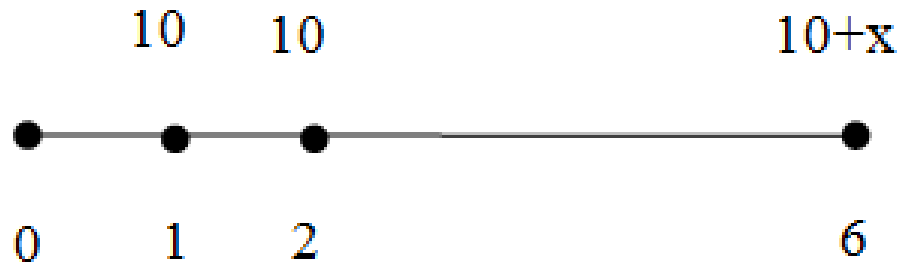
$$x = 9.11$$

$$(K_6 + x) \cdot (1 + r) = 100$$

$$x = -1.60$$

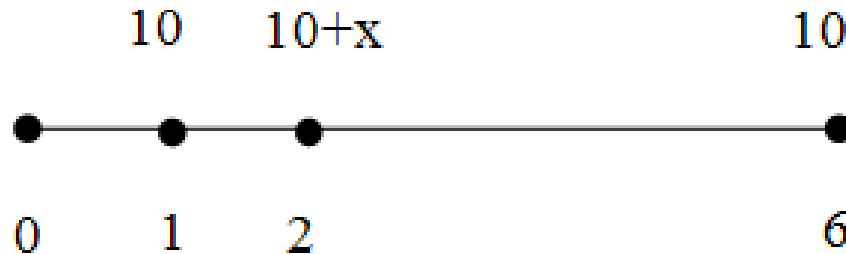
(Rozwiązanie odrzucić)

# Przykład 1 - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x \cdot (1+r) = 100$$

$$x = 8.13$$



$$K_6 + x \cdot (1+r)^5 = 100$$

$$x = 5.17$$

## Przykład 1 – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)((1+r)^n - 1)}$$

$$n = 6$$

$$E = 11.00$$

## Przykład 1a

- Przez ile lat należy wpłacać na końcu każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.

## Przykład 1a

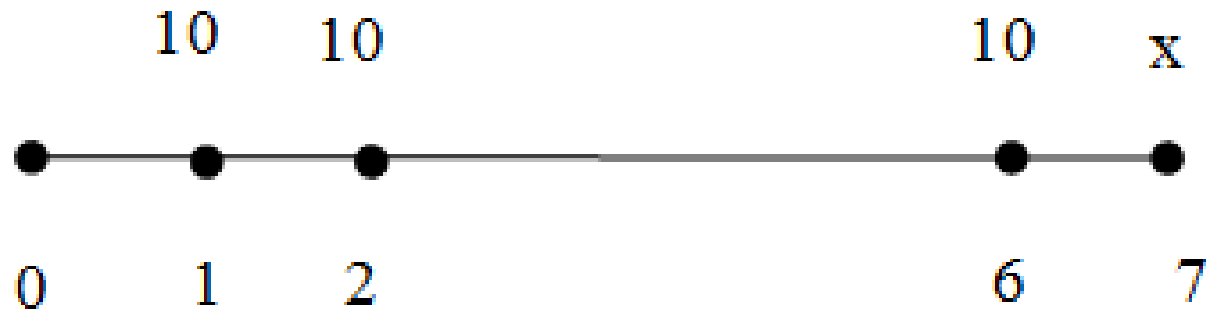
$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$n = 6.96$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{r \cdot K_n}{E} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

## Przykład 1a - dodatkowa niepełna wpłata



$$K_6 \cdot (1 + r) + x = 100$$

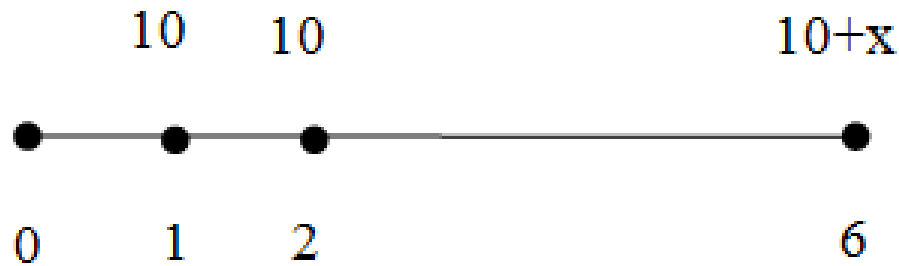
$$x = 9.11$$

$$K_n = E \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$K_6 = 81.15$$

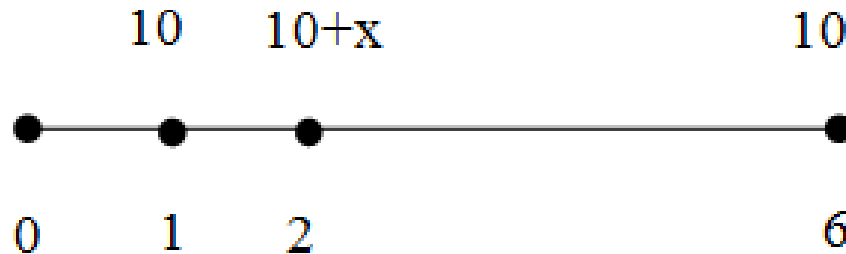


# Przykład 1a - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x = 100$$

$$x = 18.85$$



$$K_6 + x \cdot (1+r)^4 = 100$$

$$x = 11.98$$

## Przykład 1a – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)^n - 1}$$

$$n = 7$$

$$E = 9.91$$

## Przykład 2

Oprocentowanie proste – wkłady z góry

$$E = 10$$

$$K_n = 100$$

$$r = 12\%$$

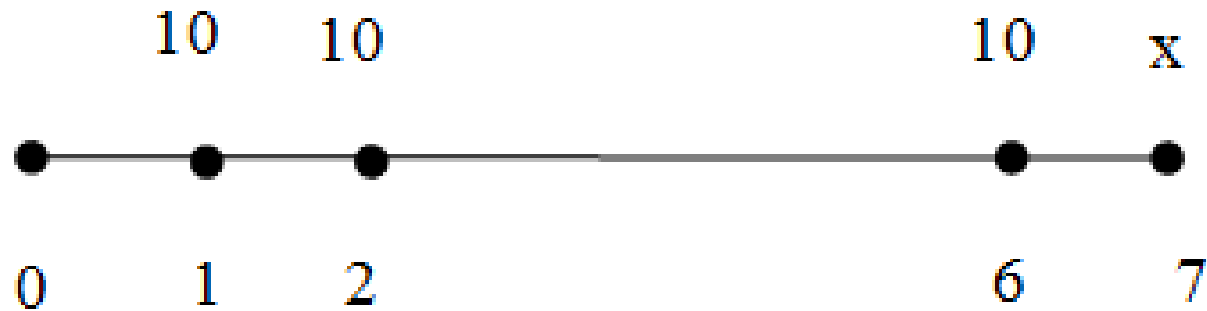
$$K_n = E \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n+1}{2} r \right)$$

$$100 = 10 \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{n+1}{2} \cdot 0.12 \right)$$

$$3 \cdot n^2 + 53 \cdot n - 500 = 0$$

$$n = 6.81$$

## Dodatkowa niepełna wpłata

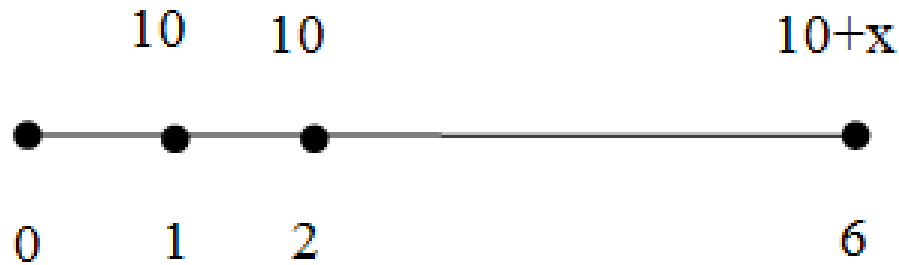


$$K_6 = 10 \cdot 6 \cdot \left( 1 + \frac{6+1}{2} \cdot 0.12 \right) = 85.2$$

$$K_6 + x = 100 \quad x = 14.8$$

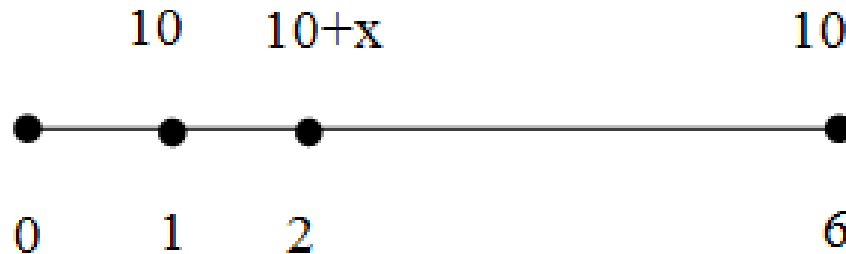
$$(K_6 + x) \cdot (1 + r) = 100 \quad x = 4.09$$

## Powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x \cdot (1+r) = 100$$

$$x = 13.21$$



$$K_6 + x \cdot (1+5r) = 100$$

$$x = 9.25$$

$$K_6 = 85.2$$

## Nowe wpłaty

$$E = \frac{K_n}{n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} r\right)}$$

$$n = 7$$

$$E = 9.65$$