

Arytmetyka finansowa

Wykład 3

Dr Wioletta Nowak

Renta o stałych ratach

$$K_N = K(1+r)^N - A_N$$

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right)$$

$$K = \frac{a \cdot (1+r)}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right)$$

Wysokość renty

$$a = \frac{K \cdot r}{1 - (1+r)^{-N}}$$

$$a = \frac{1}{1+r} \frac{K \cdot r}{1 - (1+r)^{-N}}$$

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Okres wypłacania renty

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1 + r)}$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{(1 + r) \cdot a}\right)}{\ln(1 + r)}$$

Renta wieczysta

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a_w}{r}$$

$$K = \frac{a_w \cdot (1+r)}{r}$$

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right) = \frac{a}{r}$$

Przykład 1 – renta wypłacana z dołu

$$N = 4 \quad K = 15 \quad r = 4\%$$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.1	11.5
2	11.5	11.9	4.1	7.8
3	7.8	8.1	4.1	4.0
4	4.0	4.1	4.1	0

$$a = \frac{K \cdot r}{1 - (1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 1a – renta wypłacana z góry

$$N = 4 \quad K = 15 \quad r = 4\%$$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.0	11.0
2	11.0	11.5	4.0	7.5
3	7.5	7.8	4.0	3.8
4	3.8	4.0	4.0	0

$$a = \frac{1}{1+r} \frac{K \cdot r}{1 - (1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 2

- Jaka powinna być stopa procentowa by z kapitału 100 zł można było wypłacać 12 zł przez 10 lat

a) z dołu

$$r = 3.46\%$$

b) z góry

$$r = 4.304\%$$

$$1 = (1 + r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{a} \right)$$

$$1 = (1 + r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{(1 + r) \cdot a} \right)$$

Przykład 3

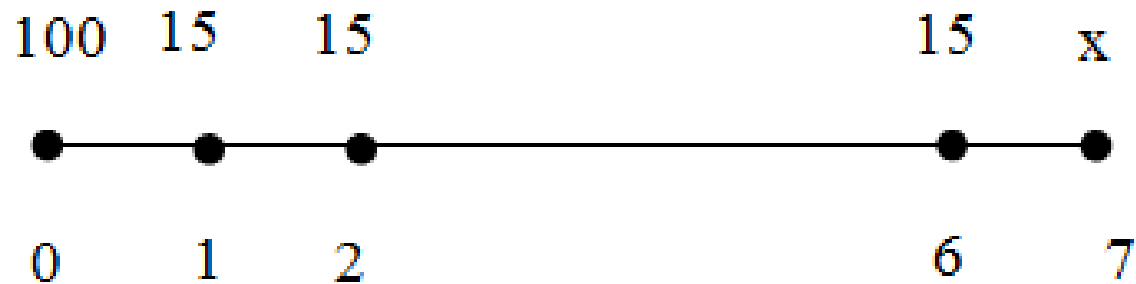
- Przez ile lat można z 100 zł stałą rentę roczną z dołu w wysokości 15 zł? Roczna stopa procentowa 1%.

$$N = 6.93$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1 + r)}$$

- Dodatkowa niepełna renta
- Powiększenie jednej z rent
- Zaokrąglenie liczby rent do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych rent

Przykład 3 - Dodatkowa niepełna renta



$$\left(K(1+r)^6 - A_6\right) \cdot (1+r) = x$$

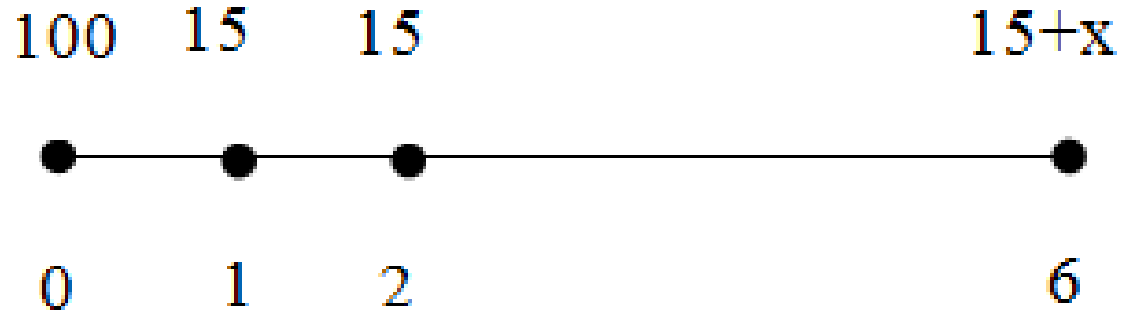
$$A_6 = a \cdot \frac{(1+r)^6 - 1}{r}$$

$$K(1+r)^6 - A_6 = \frac{x}{1+r}$$

$$K = \frac{A_6}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^7}$$

$$x = 14.011$$

Przykład 3 - Powiększenie jednej z rent



$$K(1+r)^6 - A_6 = x$$

$$x = 13.87$$

Przykład 3 – Nowa renta stała

$$a = \frac{K \cdot r}{1 - (1 + r)^{-7}} \qquad a = \frac{100 \cdot 0.01}{1 - (1 + 0.01)^{-7}} = 14.86$$

Przykład

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20% (kapitalizacja złożona kwartalna). Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100 \qquad r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	5	30	75
2	75	25	3.75	28.75	50
3	50	25	2.5	27.5	25
4	25	25	1.25	26.25	0
		100	12.5	112.5	

Plan spłaty długu – równe raty kapitałowe (odsetki od spłaconego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	25	1.25	26.25	75
2	75	25	2.5	27.5	50
3	50	25	3.75	28.75	25
4	25	25	5	30	0
		100	12.5	112.5	

Plan spłaty długu – ustalone raty kapitałowe (odsetki od bieżącego długu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	10	5	15	90
2	90	20	4.5	24.5	70
3	70	20	3.5	23.5	50
4	50	50	2.5	52.5	0
		100	15.5	115.5	

Plan spłaty długu – dług spłacony w 4 kwartale

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	0	5	5	100
2	100	0	5	5	100
3	100	0	5	5	100
4	100	100	5	105	0
		100	20	120	

Splata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja złożona z dołu

$$S(1+r)^N = A_1(1+r)^{N-1} + A_2(1+r)^{N-2} + \dots + A_N$$

$$S = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_N}{(1+r)^N}$$

$$S(1+r)^N = A \frac{(1+r)^N - 1}{r}$$

$$A = \frac{S \cdot r \cdot (1+r)^N}{(1+r)^N - 1}$$

Splata dlużów – równe raty łączne

$$Z_n = r \cdot S_{n-1} \quad T_n = S_{n-1} - S_n \quad A_n = T_n + Z_n$$

$$S_n = S(1+r)^n - \left(A_1(1+r)^{n-1} + A_2(1+r)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(1+r) \right) - A_n$$

$$S_n = (1+r) \left(S(1+r)^{n-1} - \left(A_1(1+r)^{n-2} + A_2(1+r)^{n-3} + \dots + A_{n-1} \right) \right) - A_n$$

$$S_n = (1+r)S_{n-1} - A_n$$

Splata długów – równe raty łączne

- Kapitalizacja ciągła

$$Se^{r \cdot N} = A_1 e^{r(N-1)} + A_2 e^{r(N-2)} + \dots + A_N$$

$$Se^{r \cdot N} = A \frac{e^{r \cdot N} - 1}{e^r - 1}$$

$$A = S \cdot e^{r \cdot N} \cdot \frac{e^r - 1}{e^{r \cdot N} - 1}$$

$$Z_n = S_{n-1} \cdot (e^r - 1) \quad T_n = S_{n-1} - S_n \quad A_n = T_n + Z_n$$

Przykład

- Dług 100 zł należy spłacić w czterech ratach kwartalnych. Stopa procentowa wynosi 20% (kapitalizacja złożona kwartalna). Ułożyć plan spłaty długu.

$$S = 100 \qquad r = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.2	5	28.2	76.8
2	76.8	24.36	3.84	28.2	52.44
3	52.44	25.58	2.62	28.2	26.86
4	26.86	26.86	1.34	28.2	0
		100	12.8	112.8	

Plan spłaty długu – równe raty łączne (kapitalizacja ciągła)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	23.16	5.13	28.28	76.84
2	76.84	24.34	3.94	28.28	52.5
3	52.5	25.59	2.69	28.28	26.91
4	26.91	26.91	1.38	28.28	0
		100	13.14	113.14	

Plan spłaty długu – ustalone raty łączne (kapitalizacja złożona z dołu)

n	S_{n-1}	T_n	Z_n	A_n	S_n
1	100	15	5	20	85
2	85	25.75	4.25	30	59.25
3	59.25	37.04	2.96	40	22.21
4	22.21	22.21	1.11	23.32	0
		100	13.32	113.32	

$$S(1+r)^4 = A_1(1+r)^3 + A_2(1+r)^2 + A_3(1+r) + \boxed{A_4}$$