

Arytmetyka finansowa

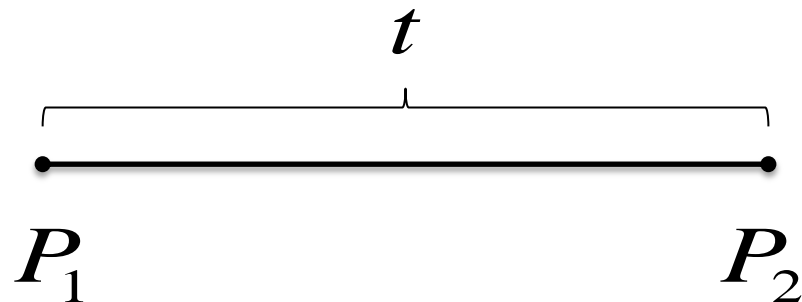
Wykład 5

Dr Wioletta Nowak

Bon skarbowy

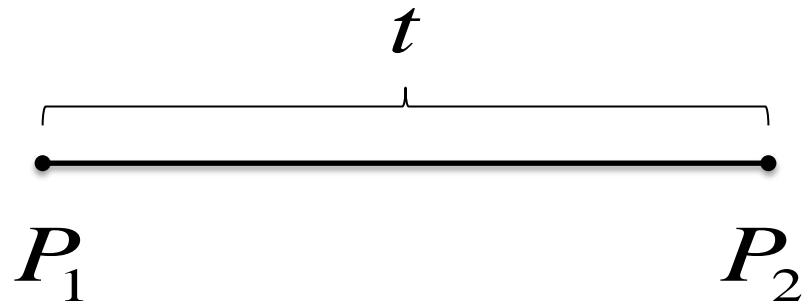
- Instrument dłużny, emitowany przez Skarb Państwa za pośrednictwem Ministerstwa Finansów.
- **Termin wykupu** – dzień w którym emitent dokonuje wykupu, Skarb Państwa zwraca dług posiadaczowi bonu skarbowego. W Polsce – najczęściej bony 13, 26 lub 52-tygodniowe.
- **Wartość nominalna** – wartość, którą Skarb Państwa płaci posiadaczowi w terminie wykupu (w Polsce 10000 PLN).
- **Cena bonu skarbowego** – sprzedaż z dyskontem, po cenie niższej od wartości nominalnej.

Bony skarbowe



- P_1 – cena zakupu bonu
- P_2 – wartość nominalna bonu
- t – liczba dni od daty zakupu do dnia wykupu

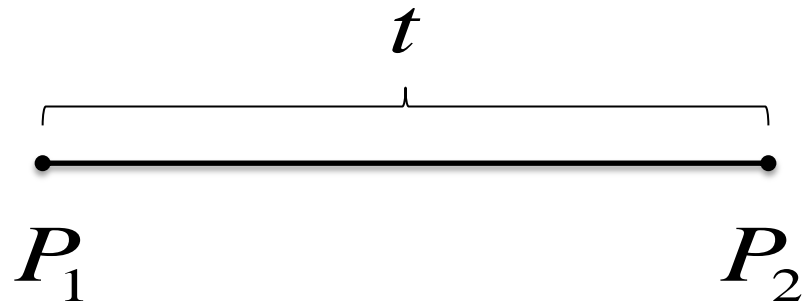
Bony skarbowe – stopa rentowności



$$r = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot \frac{360}{t}$$

- Stopa rentowności (dochodowości) – relacja dochodu uzyskanego z tytułu inwestycji w bon skarbowy do ceny zakupu bonu, przy czym wartość przeliczona w skali roku.

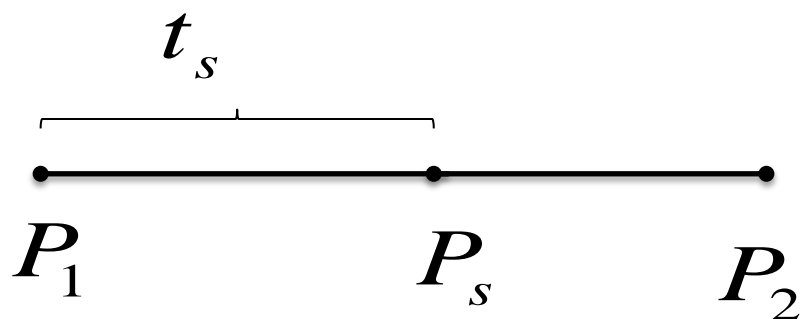
Bony skarbowe – wyprowadzenie wzoru na roczną stopę rentowności



$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \rightarrow t$$

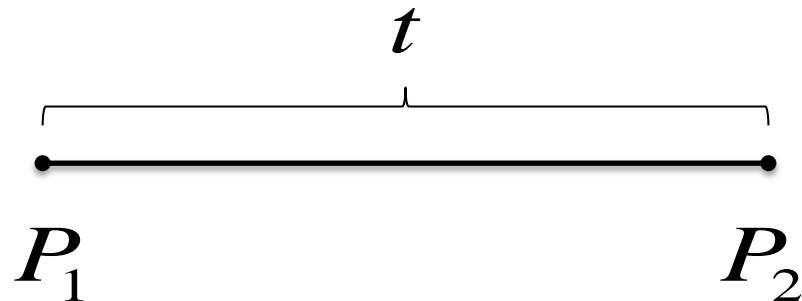
$$r \rightarrow 360$$

Bony skarbowe – stopa zwrotu w okresie posiadania bonu



$$r_s = \frac{P_s - P_1}{P_1} \cdot \frac{360}{t_s}$$

Bony skarbowe – stopa dyskontowa



$$d = \frac{P_2 - P_1}{P_2} \cdot \frac{360}{t}$$

- Stopa dyskontowa – relacja dochodu uzyskanego z tytułu inwestycji w bon skarbowy do wartości nominalnej bonu, przy czym wartość przeliczona w skali roku.

Bony skarbowe – obliczanie ceny bonu

- Cena zakupu (za 100 zł wartości bonu) przy danej stopie dochodowości.

$$P = \frac{360}{r \cdot t + 360} \cdot 100$$

- Cena zakupu (za 100 zł wartości bonu) przy danej stopie dyskontowej

$$P = \left(1 - \frac{d \cdot t}{360} \right) \cdot 100$$

Bony skarbowe – związek między stopą dochodowości a stopą dyskontową

$$\frac{360}{r \cdot t + 360} \cdot 100 = \left(1 - \frac{d \cdot t}{360} \right) \cdot 100$$

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot \frac{t}{360}}$$

$$d = \frac{r}{1 + r \cdot \frac{t}{360}}$$

Przykład 1 – bony skarbowe

Inwestor nabywa na rynku pierwotnym 26-tygodniowe bony skarbowe o nominale 1,5 mln zł po cenie 97,9005 za 100 zł.

- Jaką kwotę musi zapłacić za zakupione bony?

$$9790,05 \cdot 150 = 1468508$$

- Jaka jest stopa rentowności nabytych instrumentów?

$$r = \frac{100 - 97,9005}{97,9005} \cdot \frac{360}{182} = 0,04242$$

- Z jaką stopą dyskontową inwestor nabył bony?

$$d = \frac{100 - 97,9005}{100} \cdot \frac{360}{182} = 0,04153$$

Przetarg na bony skarbowe

Źródło: www.money.pl

▸ Bony skarbowe - przetarg z dnia 2011.05.30	
Rodzaj bonu	52 tyg.
Data wykupu	2012.05.30
Kod bonu ISIN	PL0000006045
Podaż [mln PLN]	600
Popyt [mln PLN]	2667
Wartość przyjętych ofert [mln PLN]	505
Najniższa przyjęta cena przetargowa [PLN]	9556.3
Średnia ważona cena przetargowa przyjętych ofert [PLN]	9557.68
Najwyższa zgłoszona cena przetargowa [PLN]	9560.18
Rentowność minimalna [%]	4.550
Rentowność średnia [%]	4.577
Rentowność maksymalna [%]	4.592
Data zapłaty za bony	2011.06.01
Stopa redukcji	-

ISIN – International Securities Identification Number

Przetarg na bony skarbowe z dnia 30-05-2011

- Popyt na bony ponad czterokrotnie przewyższał podaż.
- Jednak z 600 mln wartości nominalnej bonów, nie sprzedano bonów o wartości 95 mln.
- Oferty zakupu z najniższą przyjętą ceną nie podlegały redukcji – po akceptacji wszystkich ofert z tą ceną wciąż były nie przydzielone nikomu bony.
- Wartość pozyskanych środków wyniosła 482 662 840 zł (=9557,68*50500).
- Średnia rentowność:

$$\frac{505000000 - 482662840}{482662840} \cdot \frac{360}{364} = 0,04577$$

Przetarg na bony skarbowe z dnia 30-05-2011

- Dla średniej ceny 9557,68 zł za 10000 zł, dyskonto w skali roku wynosi

$$\frac{10000 - 9557,68}{10000} \cdot \frac{360}{364} = 0,043746$$

- Średnia rentowność liczona z wykorzystaniem stopy dyskontowej

$$\frac{0,043746}{1 - 0,043746 \cdot \frac{360}{364}} = 0,04577$$

Przykład – przetarg na bony

- Hipotetyczny przetarg na 26-tygodniowe bony skarbowe o wartości nominalnej 900 mln zł.

Numer oferty	Wartość nominalna zakupu (w mln zł)	Cena za 10 tys. zł wartości nominalnej (w zł)
1	700	9790,1
2	400	9785,0
3	600	9780,5
Razem	1700	

Numer oferty	Oferta zakupu		Cena jednego bonu w zł	Dyskonto dla 1 bonu w zł	Stopa dyskontowa	Stopa rentowności
	Wartość nominalna w mln zł	Liczba bonów w tys. szt.				
1	700	70	9790,1	209,9	0,041519	0,042409
2	400	40	9785,0	215	0,042527	0,043462
3	600	60	9780,5	219,5	0,043418	0,044392
Razem	1700	170				

$$d = \frac{10000 - 9790,1}{10000} \cdot \frac{360}{26 \cdot 7} = 0,041519$$

$$r = \frac{10000 - 9790,1}{9790,1} \cdot \frac{360}{26 \cdot 7} = 0,042409$$

- Założenie emitenta – kryterium odrzucenia zgłoszonej oferty – stopa dyskontowa większa niż **4,3%**.

Kryterium równoważne:

- Cena bonu mniejsza niż **9782,61 zł**
- Stopa rentowności większa niż **0,04396**

$$P = \left(1 - \frac{0,043 \cdot 182}{360} \right) \cdot 100 = 9782,61$$

$$r = \frac{0,043}{1 - \frac{0,043 \cdot 182}{360}} = 0,04396$$

Numer oferty	Zakup bonów		Wartość początkowa bonów w zł	Dyskonto w zł
	Wartość nominalna w mln zł	Liczba bonów w tys. szt.		
1	700	70	685 307 000	14 693 000
2	200	20	195 700 000	4 300 000
Razem	900	90	881 007 000	18 993 000

Stopa redukcji: 50%

Oferta 3 odrzucona w przetargu.

- Średnia cena sprzedaży bonów

$$\frac{881007000}{90000} = 9777,56$$

- lub $\frac{7}{9} \cdot 9790,1 + \frac{2}{9} \cdot 9785 = 9777,56$

$$P = w_1 \cdot P_1 + w_2 \cdot P_2$$

$$w_1 = \frac{7000000000}{9000000000} = \frac{7}{9}$$

$$w_2 = \frac{2}{9}$$

- Średnia stopa dyskontowa

$$\frac{18993000}{900000000} \cdot \frac{360}{182} = 0,0417429$$

- lub

$$\frac{7}{9} \cdot 0,041519 + \frac{2}{9} \cdot 0,042527 = 0,0417429$$

$$d = w_1 \cdot d_1 + w_2 \cdot d_2 \quad w_1 = \frac{7}{9} \quad w_2 = \frac{2}{9}$$

- Średnia rentowność bonów

$$\frac{18993000}{881007000} \cdot \frac{360}{182} = 0,0426428$$

- lub

$$0,777868 \cdot 0,042409 + 0,222132 \cdot 0,043462 = 0,0426428$$

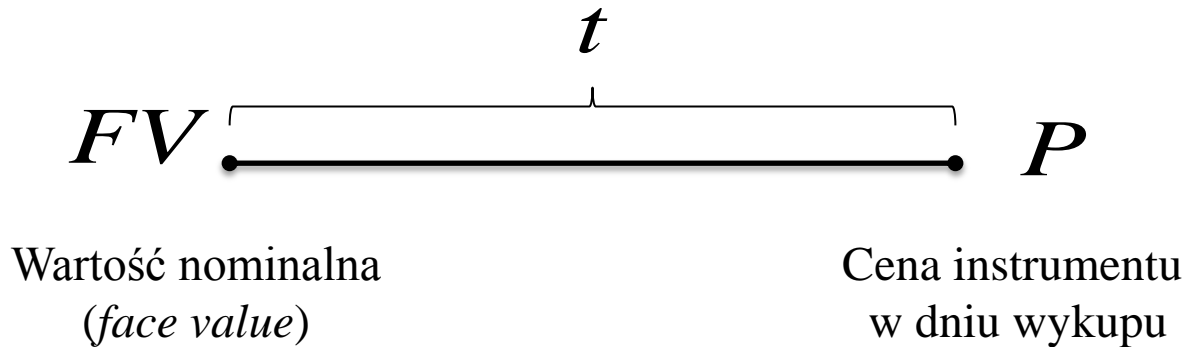
$$r = v_1 \cdot r_1 + v_2 \cdot r_2 \quad v_1 = \frac{685307000}{881007000} = 0,777868$$

$$v_2 = 1 - 0,777868 = 0,222132$$

Certyfikat depozytowy

- Instrument dłużny, emitowany przez bank w celu pozyskania środków finansowych.
- Różni się od zwykłego depozytu tym, że można nim obracać na rynku, np. można go odsprzedać bankowi, w którym został kupiony.
- Emitowany w dużych i okrągłych kwotach

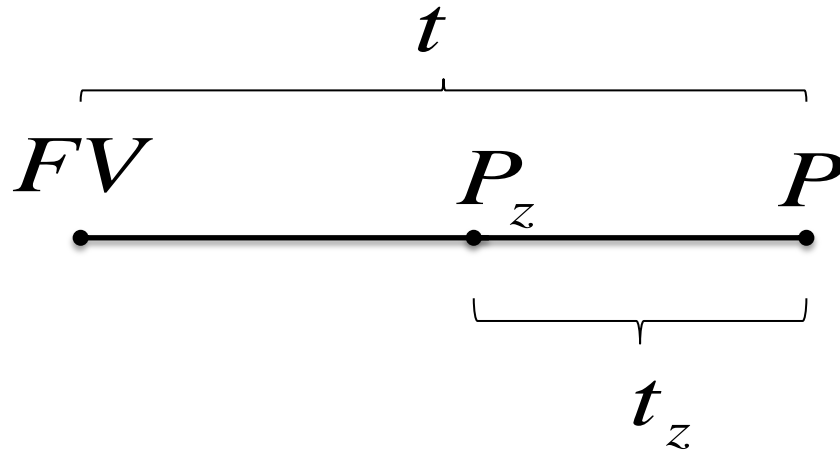
Certyfikat depozytowy – instrument finansowy z kuponem



$$P = FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360} \right)$$

r_k - stopa oprocentowania certyfikatu depozytowego

Wartość certyfikatu depozytowego

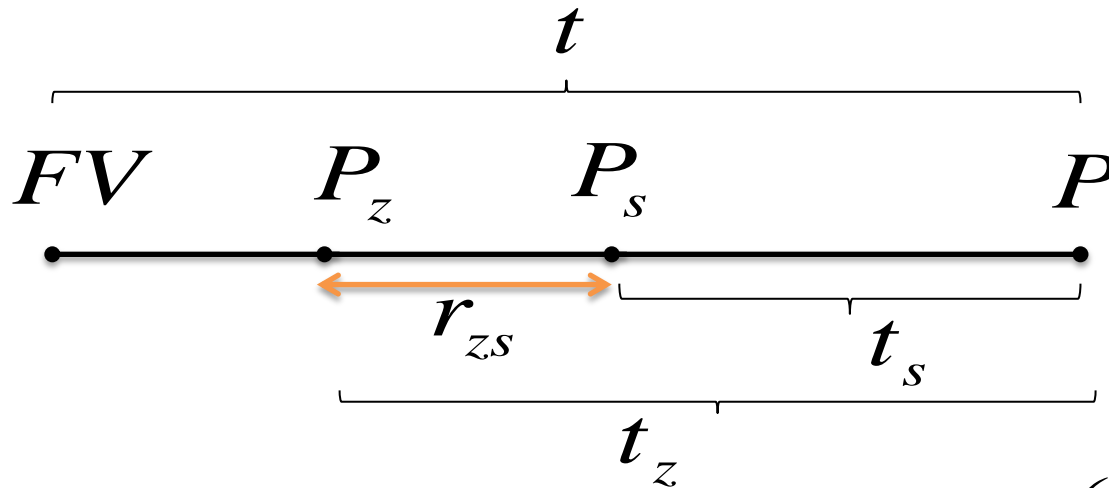


$$FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right) = P_z \cdot \left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)$$

$$P_z = \frac{FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}$$

$$P_z = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}$$

Rentowność certyfikatu depozytowego w okresie posiadania



$$r_{zs} = \frac{P_s - P_z}{P_z} \cdot \frac{360}{t_z - t_s}$$

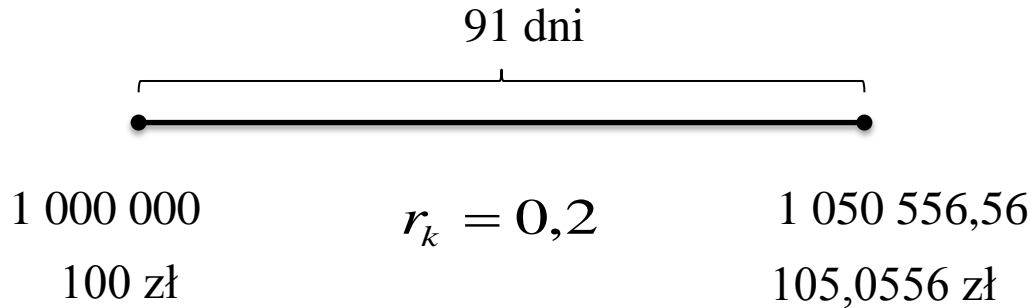
$$P_z = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}$$

$$P_s = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_s \cdot \frac{t_s}{360}\right)}$$

$$r_{zs} = \left(\frac{1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}}{1 + r_s \cdot \frac{t_s}{360}} - 1 \right) \cdot \frac{360}{t_z - t_s}$$

Przykład 2 – certyfikat depozytowy

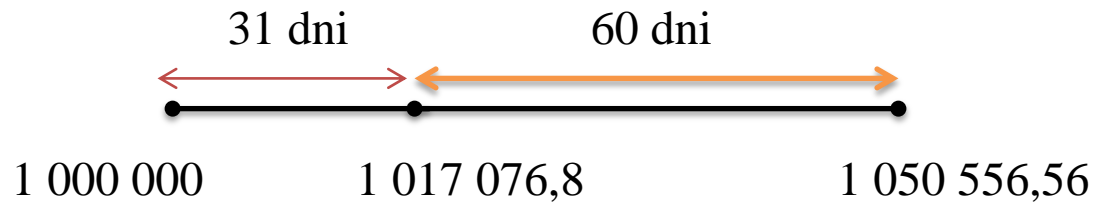
- Inwestor nabywa na rynku pierwotnym 13-tygodniowy certyfikat depozytowy o wartości nominalnej 1 mln zł i dochodowości 20%.
- Jaka jest wartość certyfikatu w dniu wykupu?



$$P = 10000000 \cdot \left(1 + 0,2 \cdot \frac{91}{360} \right) = 1050556,556$$

Przykład 2 cd.

- Po 31 dniach inwestor sprzedaje certyfikat z dochodowością 19,75%.



$$P_s = \frac{10000000 \cdot \left(1 + 0,2 \cdot \frac{91}{360}\right)}{\left(1 + 0,1975 \cdot \frac{60}{360}\right)} = 1017076,8$$

101,7077 - cena brudna

101,7077 - 1,7222 = 99,9855 - cena czysta

Odsetki za 100 zł
wartości nominalnej

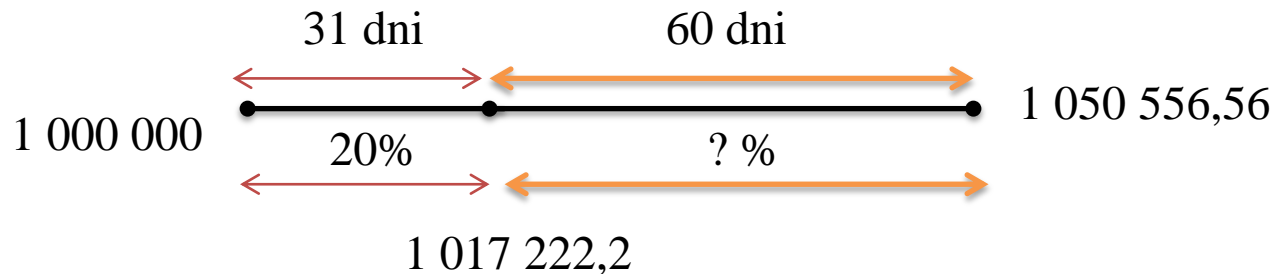
$$100 \cdot \frac{0,2 \cdot 31}{360} = 1,722$$

1 017 076,8 - 17 222,2 = 999 854,6

-145,4 zł - strata

Przykład 2 cd.

- Z jaką dochodowością inwestor powinien sprzedać certyfikat by nie ponieść straty?



$$P_s = 1000000 \cdot \left(1 + 0,2 \cdot \frac{31}{360} \right) = 1017222,2$$

$$r_s = \frac{1050556,56 - 1017222,2}{1017222,2} \cdot \frac{360}{60} = \boxed{0,1966}$$

Weksle

- **Wartość nominalna** (suma weksla) – kwota do zapłaty której zobowiązuje weksel.
- **Termin wykupu** (spłaty) – termin w którym weksel ma być spłacony.
- **Wartość aktualna** (handlowa) – wartość obliczona na podstawie wartości nominalnej przy ustalonej stopie dyskontowej na określony dzień poprzedzający termin wykupu.
- W odniesieniu do weksli czas oblicza się w dniach i zamienia na lata według reguły bankowej (dokładna liczba dni/długość roku bankowego (tzn. 360 dni))

Dygresja – rachunek czasu oprocentowania stosowany w matematyce finansowej

	Liczba lat kalendarzowych (czas w dniach/365)	Liczba lat bankowych (czas w dniach/360)
Dokładna liczba dni, obliczona według roku kalendarzowego	$\frac{271 - 74}{365} = \frac{197}{365}$	reguła bankowa $\frac{197}{360}$
Bankowa (przybliżona) liczba dni, obliczona według czasu bankowego (rok bankowy – 360 dni, miesiąc bankowy – 30 dni)	$\frac{193}{365}$	$\frac{193}{360}$

Okres: 15 marzec (74) – 28 wrzesień (271) 2011

Bankowa liczba dni oprocentowania $30 - 15 + 5 * 30 + 28 = 193$

Dyskontowanie weksli

$$W_a = W_n - D_H \qquad D_H = W_n \cdot d \cdot \frac{t}{360}$$

$$W_a = W_n \left(1 - d \cdot \frac{t}{360} \right) \qquad W_n = W_a \cdot \frac{360}{360 - d \cdot t}$$

gdzie:

W_a – wartość aktualna

W_n – wartość nominalna

D_H – dyskonto

d – stopa dyskontowa

t – czas od momentu przedłożenia weksla do dyskonta do terminu jego płatności

Przykład 3 – weksle

- W dniu 12 lipca przedłożono do dyskonta weksel o wartości nominalnej 50 000 zł. Obowiązująca w dniu dyskontowania stopa dyskontowa wynosiła 6% w skali roku, a termin płatności weksla upływa 5 września tego samego roku. Obliczyć dyskonto oraz aktualną wartość rynkową weksla.

$$t = 248 - 193 = 55 \quad W_n = 50000 \quad d = 0,06$$

$$D_H = \frac{50000 \cdot 0,06 \cdot 55}{360} = 458,33$$

$$W_a = 50000 - 458,33 = 49541,67$$

Liczby procentowe

$$D_H = W_n \cdot d \cdot \frac{t}{360} \quad \text{lub} \quad D_H = \frac{W_n \cdot t}{360/d}$$

$$D_H = \frac{L\%}{dz.}$$

gdzie: $L\% = W_n \cdot t$ – liczba procentowa

$dz. = 360/d$ – dzielnik

Równoważność weksli

- Dwa weksle o wartościach nominalnych

W_{n1} i W_{n2} są równoważne w ustalonym dniu poprzedzającym ich wykup o czas, odpowiednio t_1 i t_2 , jeśli wartości aktualne obu weksli obliczone na ten dzień przy stopie dyskontowej d są równe.

Przykład 4 – weksel równoważny

- Dłużnik ma do spłacenia dwa weksle o wartości nominalnej 20000 i 50000. Termin wykupu pierwszego upływa za 10 dni, a drugiego za 20 dni. Obliczyć wartość nominalną weksla równoważnego tym wekslom, jeśli stopa dyskontowa wynosi 7%, termin płatności weksla równoważnego wynosi 12 dni.

$$W_{ar} = W_{a1} + W_{a2} \qquad W_a = W_n \left(1 - d \cdot \frac{t}{360} \right)$$

$$W_{nr} \left(1 - \frac{0,07 \cdot 12}{360} \right) = 20000 \left(1 - \frac{0,07 \cdot 10}{360} \right) + 50000 \left(1 - \frac{0,07 \cdot 20}{360} \right)$$

$$W_{nr} = 69929,84$$