Arytmetyka finansowa

Wykład 6

Dr Wioletta Nowak

Rynek kapitałowy

- Przez rynek kapitałowy rozumie się ogół transakcji kupna-sprzedaży, których przedmiotem są instrumenty finansowe o okresie wykupu dłuższym niż 1 rok.

- Środki uzyskane z emisji tych instrumentów mogą być przeznaczone na działalność rozwojową emitenta (finansowanie inwestycji).

Instrumenty rynku kapitałowego

- **Instrumenty dłużne rynku kapitałowego**: obligacje, listy zastawne, jednostki uczestnictwa, certyfikaty inwestycyjne, jednostki indeksowe, certyfikaty indeksowe, jednostki rozrachunkowe.

- **Instrumenty związane z prawem własności**: akcje, prawa poboru, prawa do akcji, kwity depozytowe.

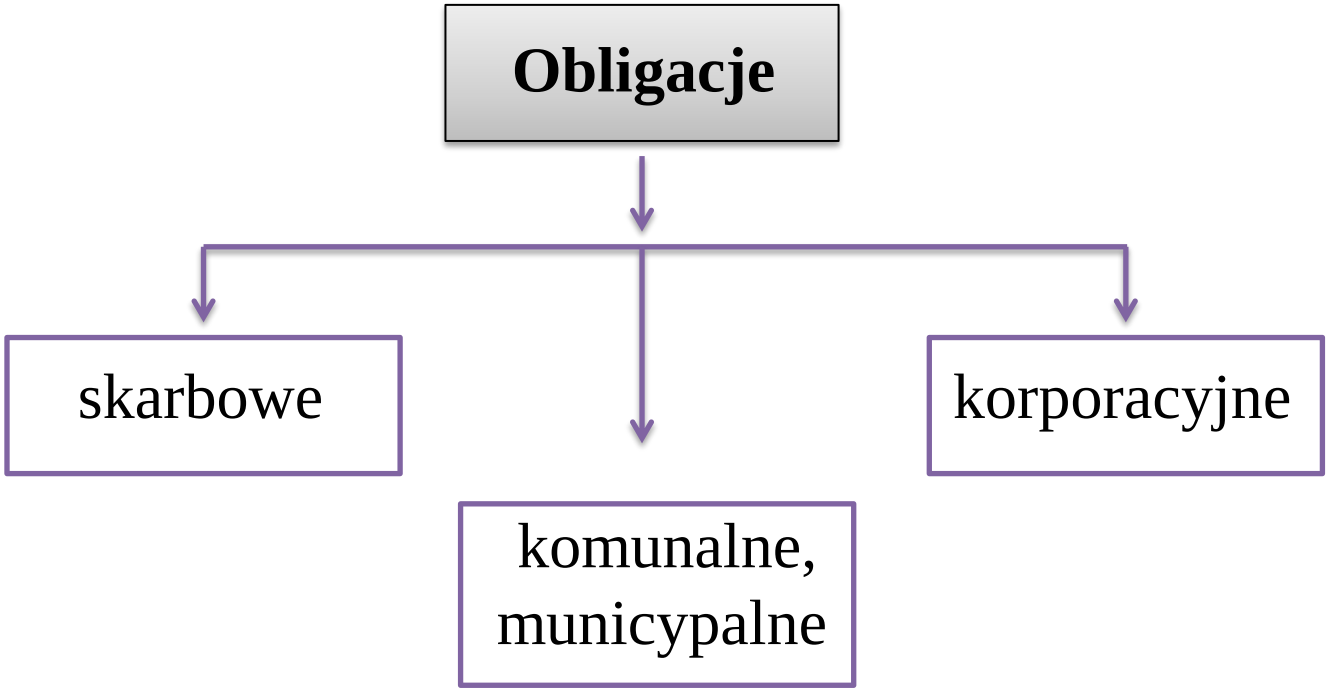
Obligacje

- Obligacja – papier wartościowy, w którym emitent stwierdza, że jest dłużnikiem właściciela obligacji (obligatariusza) i zobowiązuje się wobec niego do spełnienia określonego świadczenia (wykupu obligacji).

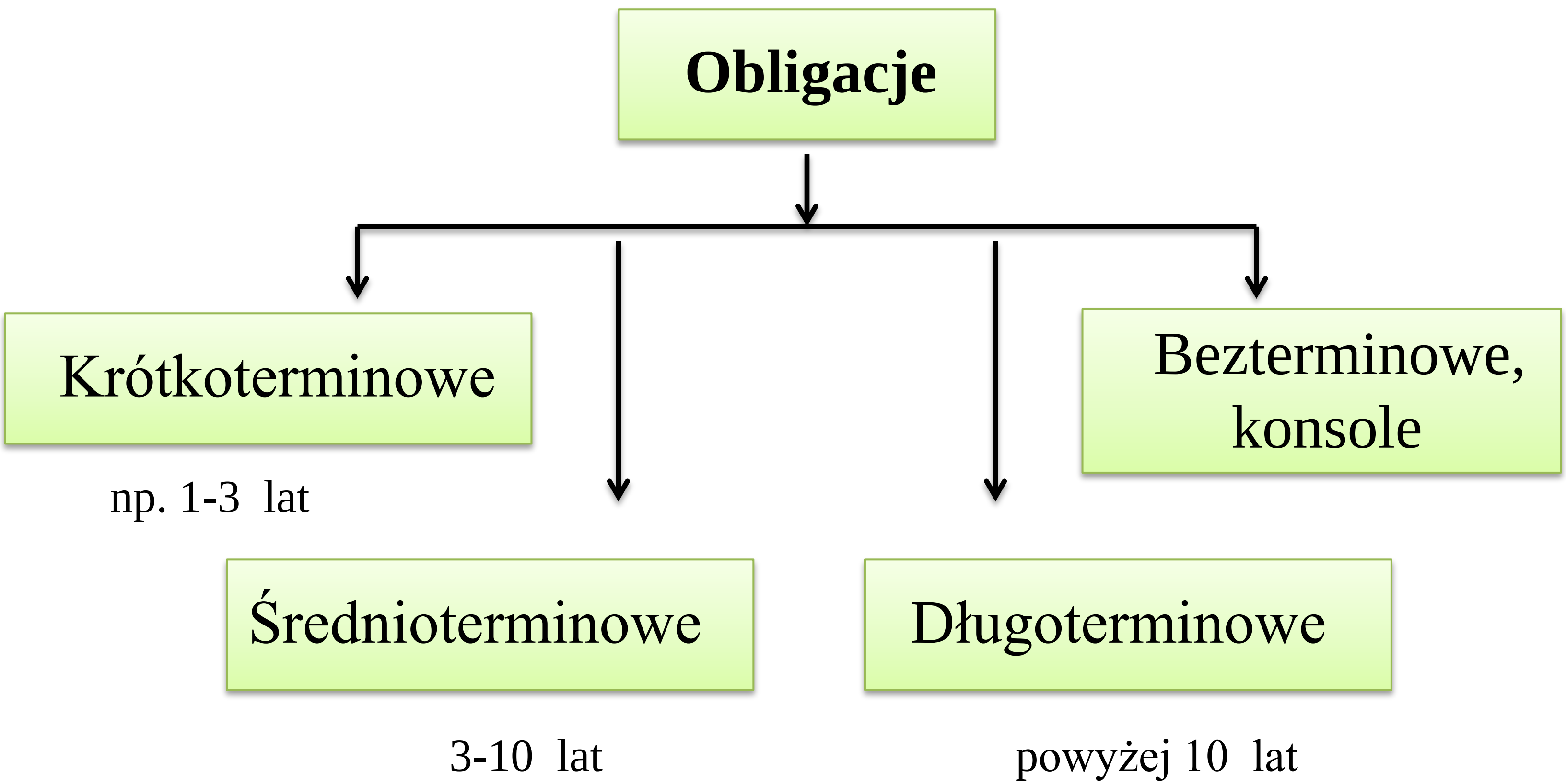
Kryterium – rynek, na którym obligacja jest notowana

- **Obligacje**
  - krajowe
  - międzynarodowe
    - zagraniczne
      - Obligacje podmiotów zagranicznych na rynku krajowym, rozprowadzane przez dealerów krajowych
    - euroobligacje
      - Nominowane w innej walucie niż waluta kraju lokowania, rozprowadzane przez międzynarodowe konsorcja dealerów

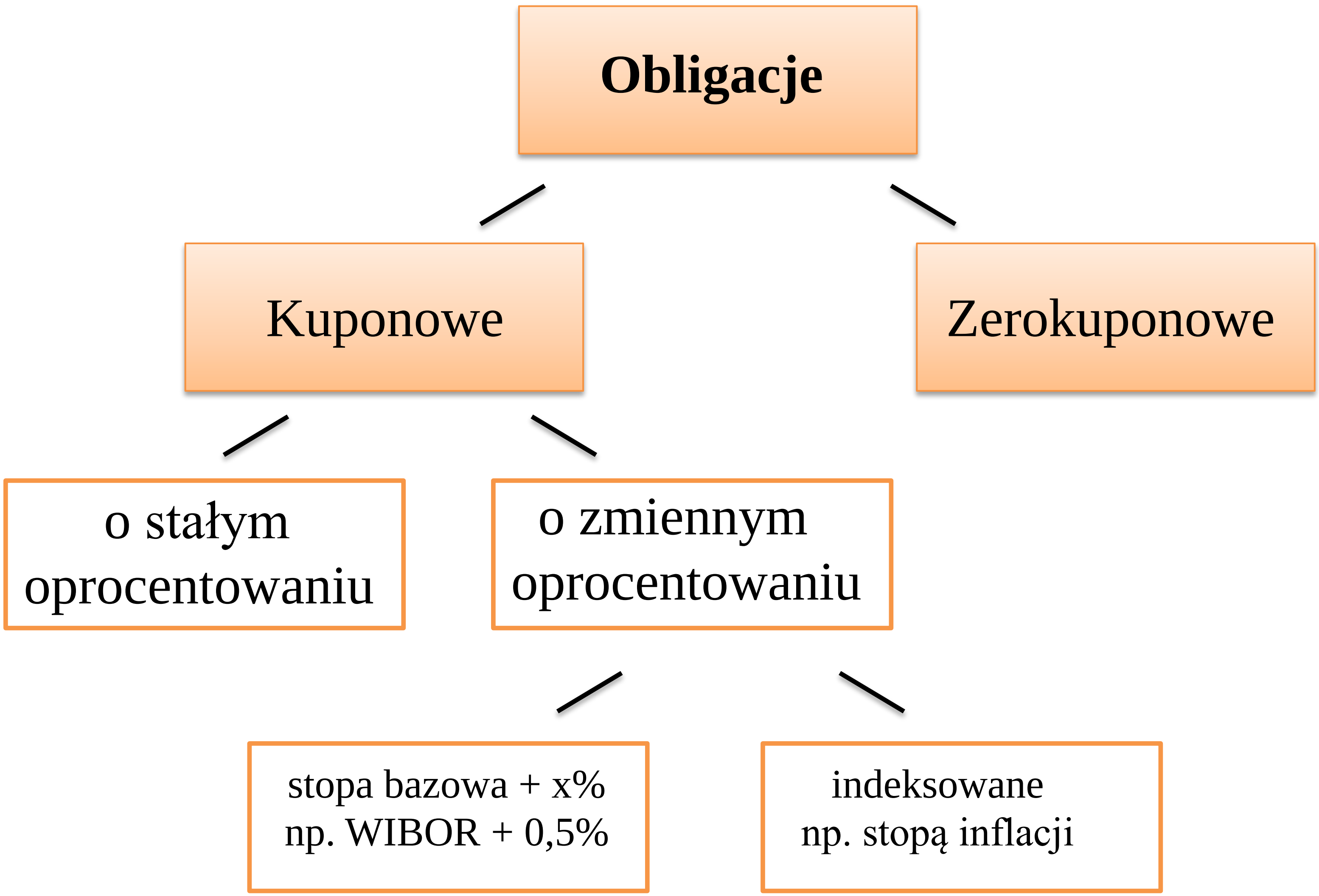
Kryterium – rodzaj emitenta



Kryterium – okres do wykupu

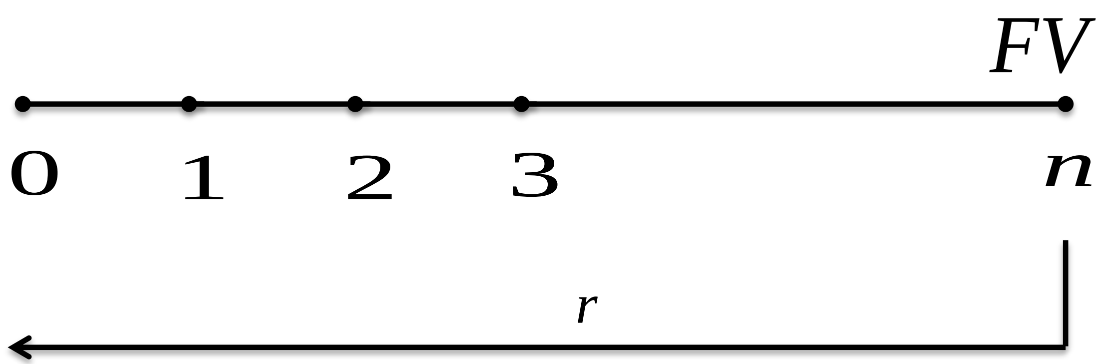


Kryterium – wartość nominalna i oprocentowanie obligacji



Podstawy wyceny obligacji – obligacja zerokuponowa

- **Obligacja zerokuponowa**, FV – wartość nominalna obligacji, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, r – wymagana stopa dochodu inwestora, P – wartość obligacji



$$P = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

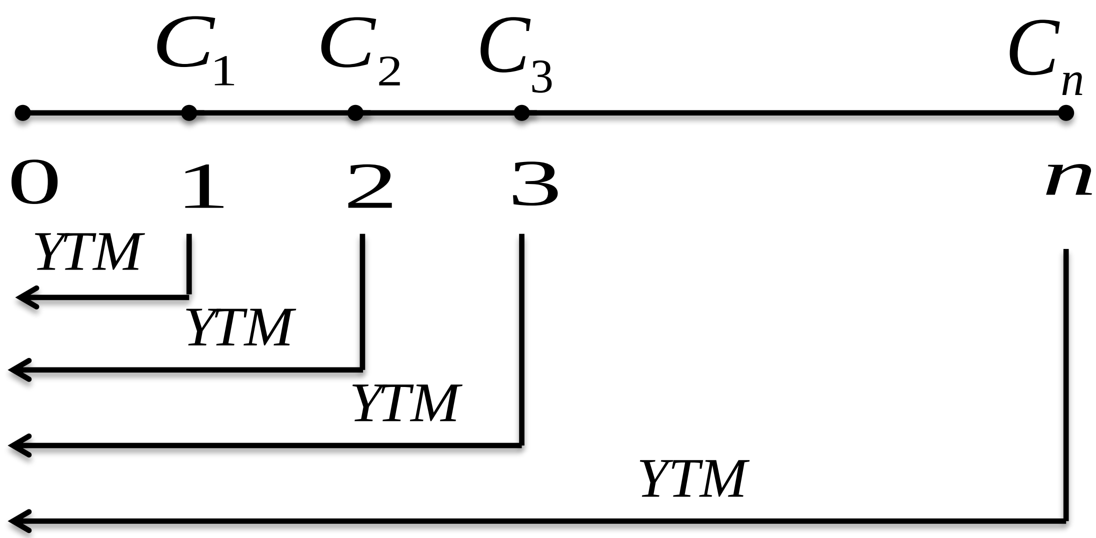
Przykład 1 – cena obligacji zerokuponowej

- Dana jest obligacja zerokuponowa z terminem wykupu 1,5 roku o wartości nominalnej 100. Wymagana stopa dochodu inwestora wynosi 5%. Oblicz cenę obligacji.

$$P = \frac{100}{(1+0{,}05)^{1{,}5}} = 92{,}94$$

Podstawy wyceny obligacji – obligacja kuponowa

- **Obligacja kuponowa**, C_i – dochód z tytułu posiadania obligacji uzyskany w okresie *i*, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, *YTM* (*yield to maturity*) – stopa dochodu w okresie do wykupu, P – wartość obligacji



$$P = \frac{C_1}{1+YTM} + \frac{C_2}{(1+YTM)^2} + \quad \cdots \quad + \frac{C_n}{(1+YTM)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+YTM)^i}$$

Podstawy wyceny obligacji – obligacja o stałym kuponie

- **Obligacja o stałym kuponie**, C – odsetki, M – wartość nominalna obligacji, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, YTM – stopa dochodu w okresie do wykupu, P – wartość obligacji

$$P = \frac{C}{1+YTM} + \frac{C}{(1+YTM)^2} + \quad \cdots \quad + \frac{C+M}{(1+YTM)^n}$$

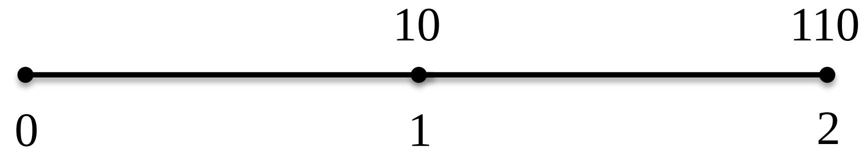
$$P = \frac{C}{1+YTM}\left(1 + \frac{1}{1+YTM} + \quad \cdots \quad + \frac{1}{(1+YTM)^{n-1}}\right) + \frac{M}{(1+YTM)^n}$$

$$\boxed{P = C \cdot \frac{1-(1+YTM)^{-n}}{YTM} + \frac{M}{(1+YTM)^n}}$$

Przykład 2 – wartość obligacji kuponowej

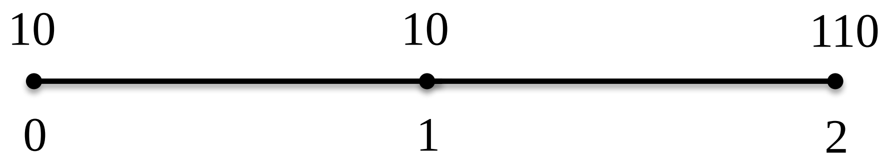
- Dana jest obligacja, o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%. Stopa dochodu w okresie do wykupu tej obligacji wynosi 9%. Oblicz wartość obligacji, gdy termin do wykupu wynosi 2 lata po płatności oraz 2 lata przed płatnością.
- po płatności

$$P = \frac{10}{1{,}09} + \frac{110}{(1{,}09)^2} = 101{,}76$$



- przed płatnością

$$P = 10 + \frac{10}{1{,}09} + \frac{110}{(1{,}09)^2} = 111{,}76$$



Przykład 3 – wartość obligacji

- Dana jest obligacja o stałym oprocentowaniu z terminem do wykupu 2 lata i 6 miesięcy, o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%. Stopa dochodu w okresie do wykupu wynosi 8%. Odsetki płacone są co roku. Oblicz wartość obligacji.

$$P = \frac{10}{(1,08)^{0,5}} + \frac{10}{(1,08)^{1,5}} + \frac{110}{(1,08)^{2,5}} = 109,28$$

Wycena konsoli (obligacji wieczystej)

- Obligacja ze stałym kuponem. Emitent przy emisji zobowiązuje się płacić ich posiadaczom stały dochód przez czas nieograniczony.

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \quad \cdots$$

$$\boxed{P = \frac{C}{r}}$$

- C – wartość kuponu, *r* – rentowność do wykupu obligacji,

Przykład 4 – własności stopy dochodu w terminie do wykupu

Dana jest obligacja 4-letnia o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%. Odsetki płacone są co roku.

Termin do wykupu	**Cena obligacji**			**Premia**	**Dyskonto**	**Procent spadku premii**	**Procent spadku dyskonta**
	YTM= 9%	YTM=10%	YTM=11%				
4	103,24	100	96,90	3,24	3,10	–	–
3	102,53	100	97,56	2,53	2,44	21,87%	21,23%
2	101,76	100	98,29	1,76	1,71	30,51%	29,92%
1	100,92	100	99,10	0,92	0,9	47,85%	47,39%

$$\frac{3{,}24 - 2{,}53}{3{,}24} = 0{,}2187$$

Własności stopy dochodu w terminie do wykupu

- Jeśli rośnie wartość obligacji, to spada stopa dochodu *YTM* i odwrotnie, jeśli spada wartość obligacji, to rośnie stopa dochodu *YTM*.

- Jeśli nie zmienia się stopa dochodu *YTM*, wielkość premii lub dyskonta zmniejsza się w miarę zbliżania się terminu wykupu.

- Jeśli nie zmienia się stopa dochodu *YTM*, wielkość premii lub dyskonta zmniejsza się w coraz większym tempie w miarę zbliżania się do terminu wykupu.

Własności stopy dochodu w terminie do wykupu

- Wzrost wartości obligacji wywołany spadkiem stopy dochodu o określoną wartość jest wyższy niż spadek wartości obligacji wywołany wzrostem stopy dochodu o tę samą wartość.

Przykład 5 – efekt odsetek

- Dana jest 3-letnia obligacja o wartości nominalnej 100, odsetki płacone co roku.

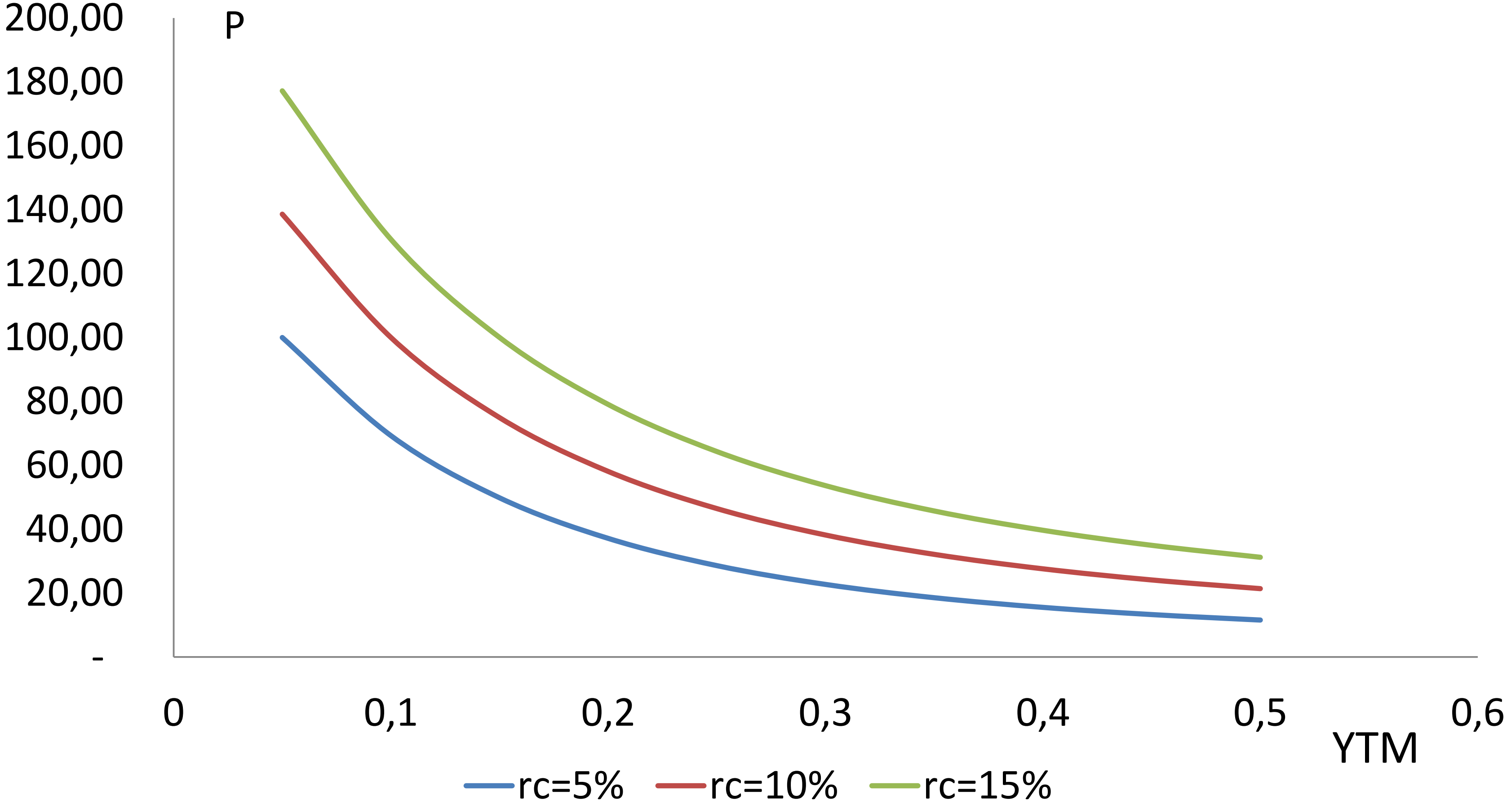
Stopa kuponowa	**Cena obligacji**		**Procent spadku wartości**
	YTM = 8%	YTM = 12%	
10%	105,15	95,20	9,47%
15%	118,04	107,21	9,18%

$$\frac{105{,}15-95{,}2}{105{,}15}=0{,}0947$$

Własności stopy dochodu w terminie do wykupu

- **Efekt odsetek** – procentowa zmiana wartości obligacji wywołana zmianą stopy dochodu jest tym mniejsza, im wyższe jest oprocentowanie obligacji, przy założeniu tego samego terminu wykupu.

Zależność ceny 10-letniej obligacji o wartości nominalnej 100 od stopy dochodu *YTM* dla różnych stóp kuponowych



Przykład 6 – efekt terminu wykupu

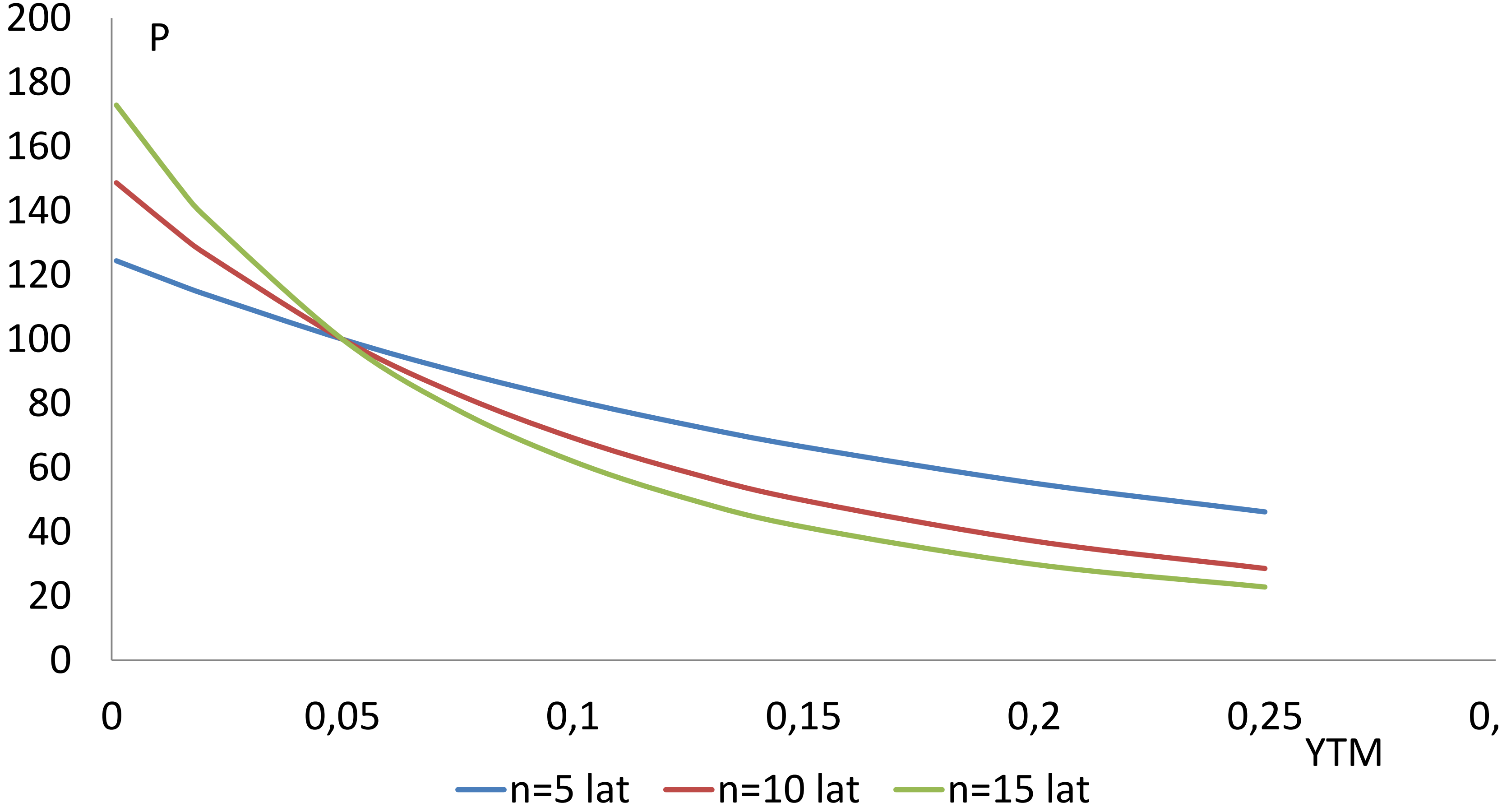
- Dana jest obligacja o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%, odsetki płacone co roku.

Termin do wykupu w latach	**Cena obligacji**		**Procent spadku wartości**
	YTM = 8%	YTM = 12%	
3	105,15	95,20	9,47%
5	107,99	92,79	14,07%

Własności stopy dochodu w terminie do wykupu

- **Efekt terminu wykupu** – procentowa zmiana wartości obligacji wywołana zmianą stopy dochodu jest tym mniejsza, im krótszy jest okres do terminu wykupu.

Zależność ceny obligacji o wartości nominalnej 100 i stopie kuponowej 5% od stopy *YTM* dla różnych terminów wykupu



Średni czas trwania (*duration*) instrumentu przynoszącego stały dochód

- Średni czas trwania instrumentu przynoszącego stały dochód jest średnią ważoną długości okresów po jakich pojawiają się przepływy pieniężne.

$$\boxed{D = w_1 t_1 + w_2 t_2 + \cdots + w_n t_n}$$

$$w_i = \frac{PV_i}{PV} \qquad PV = PV_1 + PV_2 + \cdots + PV_n$$

PV_i - wartość obecna przepływu, który wystąpi w okresie t_i

Średni czas trwania instrumentu przynoszącego stały dochód

- Wartość średniego czasu trwania leży zawsze pomiędzy momentem otrzymania pierwszego i ostatniego przepływu.

- Dla obligacji zerokuponowej jest równy długości okresu do wykupu.

- Średni czas trwania – miernik wrażliwości cen na zmiany stóp procentowych.

Średni czas trwania Macaulaya

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot C_k}{(1+YTM)^k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+YTM)^k}}$$

$$\boxed{D = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot C_k}{(1+YTM)^k}}{P}}$$

Przykład 7

- Dana jest obligacja 3-letnia o wartości nominalnej 100, stopie kuponowej 5%, stopie dochodu w okresie do wykupu 10%. Odsetki płacone co roku. Obliczyć średni czas trwania Macaulaya.

$$D = \frac{\frac{1 \cdot 5}{1{,}1} + \frac{2 \cdot 5}{(1{,}1)^2} + \frac{3 \cdot 105}{(1{,}1)^3}}{\frac{5}{1{,}1} + \frac{5}{(1{,}1)^2} + \frac{105}{(1{,}1)^3}} = 2{,}849$$

Średni czas trwania Macaulaya

- Środek ciężkości wartości bieżącej dochodów z tytułu posiadania obligacji.
- Po upływie czasu równego *D* (średni czas trwania Macaulaya) wykupiona jest połowa obligacji, jeśli uwzględnimy oprócz wartości nominalnej także odsetki, a płatności ważymy z uwzględnieniem zmiennej wartości pieniądza w czasie.
- Służy do porównywania obligacji o różnych okresach zapadalności i różnych stopach kuponowych.

Średni czas trwania Macaulaya – własności

1. Nie zmienia się istotnie wraz ze wzrostem stopy kuponowej. Wyższa stopa kuponowa – krótszy okres trwania obligacji.
2. Średni czas Macaulaya nie rośnie do nieskończoności wraz z oddalaniem się terminu wykupu, ale ma skończoną granicę, której wartość zależy od stopy dochodu (1/YTM+1/m, gdzie *m* – częstość wypłaty odsetek).
3. Im wyższa stopa dochodu w terminie do wykupu tym krótszy czas.
4. Im częściej wypłacane są odsetki tym krótszy czas.

Średni czas trwania a wrażliwość

- Mierzy wrażliwość ceny obligacji na zmiany stopy dochodu

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \cdot \frac{\Delta YTM}{1+YTM}$$

lub

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta YTM$$

$$D_M = \frac{D}{1+YTM}$$

\- zmodyfikowany średni czas trwania Macaulaya

Przykład 8

- Dana jest obligacja 3-letnia o wartości nominalnej 100, stopie kuponowej 5%, stopie dochodu w okresie do wykupu 10%. Odsetki płacone co roku (przykład 7). O ile procent zmieni się cena obligacji, jeśli stopa YTM wzrośnie o 1 punkt procentowy (spadnie o 1 punkt procentowy).

$$D = 2{,}849 \qquad D_M = \frac{2{,}849}{1{,}1} = 2{,}59 \qquad \frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta YTM$$

$$\Delta YTM = +1\% \qquad\qquad \Delta YTM = -1\%$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -2{,}59\% \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = +2{,}59\%$$

Akcje

- Papier wartościowy dający prawo posiadaczowi do współwłasności spółki akcyjnej.

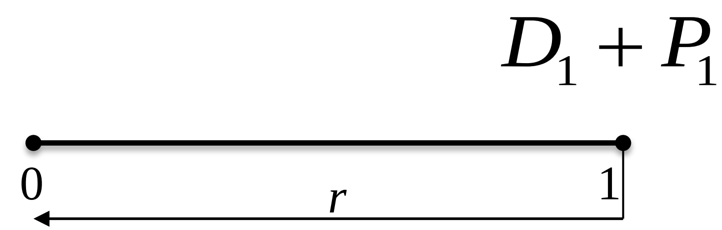
Modele wyceny akcji

- Model stałej wartości dywidendy
- Model stałego wzrostu dywidendy – model Gordona-Shapiro
- Model zmiennego wzrostu dywidendy
  - – model dwufazowy
  - – model wielofazowy

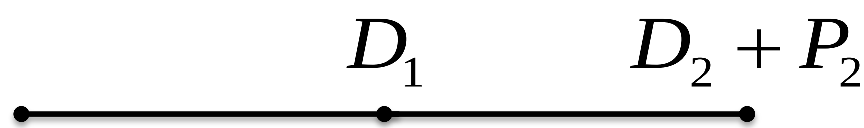
Podstawowy model wyceny akcji – model zdyskontowanych dywidend

1. Inwestor chce kupić akcję, przetrzymać rok i sprzedać po tym okresie. Oczekuje dywidendy na koniec roku.

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{P_1}{1+r}$$



2. Jeśli inwestor przetrzyma akcję o kolejny rok



$$P_1 = \frac{D_2}{1+r} + \frac{P_2}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}$$

Podstawowy model wyceny akcji – model zdyskontowanych dywidend

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2} \qquad P_2 = \frac{D_3}{1+r} + \frac{P_3}{1+r}$$

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$n \to \infty \qquad \boxed{P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}}$$

Model stałej wartości dywidendy

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}$$

$$P = D \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k}$$

$$P = D \cdot \frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}$$

$$\boxed{P = \frac{D}{r}}$$

Model stałego wzrostu dywidendy – model Gordona-Shapiro

- Dywidendy w kolejnych okresach rosną w stałym tempie, według stopy wzrostu g.

$$D_{k+1} = (1+g) \cdot D_k$$

- Dla znanej wartości dywidendy pod koniec pierwszego okresu D_1 wartość obecna strumienia dywidend wynosi

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_1 \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{D_1 \cdot (1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$P = D_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}$$

Model stałego wzrostu dywidendy

$$P = D_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{1}{r-g}$$

$$r > g$$

$$P = \frac{D_1}{r-g}$$

$$\boxed{P = \frac{D \cdot (1+g)}{r-g}}$$

$$D_1 = (1+g) \cdot D$$

Przykład 9

- Inwestor zamierza trzymać bezterminowo akcję zwykłą. Wymagana stopa zwrotu wynosi 10%. Obecna wartość dywidendy to 100. Dokonać wyceny akcji.

- **Model stałej dywidendy** $$P = \frac{D}{r} = \frac{100}{0,1} = 1000$$

- **Model stałego wzrostu dywidendy** (przy założeniu, że dywidenda rośnie w stałym tempie 8%)

$$P = \frac{D \cdot (1 + g)}{r - g} = \frac{100 \cdot (1 + 0,08)}{0,1 - 0,08} = \frac{108}{0,02} = 5400$$

Model dwufazowy

- Wyróżnia się dwa okresy wzrostu dywidendy. Przez *n* lat dywidenda rośnie w tempie g_1 a po tym okresie w tempie g_2 $(g_1 > g_2)$

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \cdots + \frac{D_n}{(1+r)^n} + \frac{\boxed{P_n}}{(1+r)^n}$$

$$D_n = (1+g_1) \cdot D_{n-1}$$

$$D_{n+1} = (1+g_2) \cdot D_n$$

$$P_n = \frac{D_{n+1}}{r-g_2} = \frac{D_n \cdot (1+g_2)}{r-g_2}$$

Model dwufazowy

- Obliczamy wartość obecną dywidend wypłacanych przez *n* okresów według stopy g_1 (w pierwszej fazie).
- Obliczamy cenę akcji na koniec pierwszej fazy (w okresie *n*) według modelu Gordona-Shapiro.
- Obliczamy wartość obecną ceny akcji na koniec pierwszej fazy.
- Sumujemy wartości obecne dywidend w pierwszym okresie i ceny akcji na koniec pierwszego okresu.

Przykład 10

- Inwestor nabywa akcję zwykłą. Obecna wartość dywidendy to 100. Dywidendy przez 3 lata rosną w tempie 8%, a potem bezterminowo w tempie 3% rocznie. Wymagana stopa zwrotu wynosi 10%.

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}$$

$$D_1 = D \cdot (1+g_1)$$

$$D_2 = D \cdot (1+g_1)^2$$

$$D_3 = D \cdot (1+g_1)^3$$

$$P_3 = \frac{D_4}{r-g_2} = \frac{D_3 \cdot (1+g_2)}{r-g_2}$$

$$P_3 = \frac{D \cdot (1+g_1)^3 \cdot (1+g_2)}{r-g_2}$$

Przykład 10

$$D_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}08) = 108$$

$$D_2 = 108 \cdot 1{,}08 = 116{,}64$$

$$D_3 = 116{,}64 \cdot 1{,}08 = 125{,}97$$

$$D_4 = 125{,}97 \cdot 1{,}03 = 129{,}75$$

$$P_3 = \frac{129{,}75}{0{,}1 - 0{,}03} = 1853{,}58$$

$$P = \frac{108}{1{,}1} + \frac{116{,}64}{(1{,}1)^2} + \frac{125{,}97}{(1{,}1)^3} + \frac{1853{,}58}{(1{,}1)^3} = 1681{,}84$$

Model wielofazowy – przykład 11

- Dywidenda wzrasta przez 4 lata według stopy g_1 przez 2 lata według stopy g_2, przez 3 lata według stopy g_3 i bezterminowo według stopy g_4

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \cdots + \frac{D_9}{(1+r)^9} + \frac{P_9}{(1+r)^9}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_1 &= D \cdot (1+g_1) \\ D_2 &= D_1 \cdot (1+g_1) \\ D_3 &= D_2 \cdot (1+g_1) \\ D_4 &= D_3 \cdot (1+g_1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_5 &= D_4 \cdot (1+g_2) \\ D_6 &= D_5 \cdot (1+g_2) \end{aligned}}$$

$$\boxed{P_9 = \frac{D_{10}}{r-g_4} = \frac{D_9 \cdot (1+g_4)}{r-g_4}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_7 &= D_6 \cdot (1+g_3) \\ D_8 &= D_7 \cdot (1+g_3) \\ D_9 &= D_8 \cdot (1+g_3) \end{aligned}}$$