Arytmetyka finansowa

Dr Wioletta Nowak

wioletta.nowak@uwr.edu.pl

https://prawo.uni.wroc.pl/user/12141/students-resources

Sylabus

- Wartość pieniądza jako funkcja czasu.
- Oprocentowanie lokaty.
- Kapitalizacja prosta, złożona z dołu i z góry, ciągła.
- Kapitalizacja zgodna i niezgodna. Równoważność oprocentowania.
- Efektywna stopa procentowa.
- Stopa zmienna w czasie. Stopa przeciętna.

Sylabus

- Oprocentowanie proste, złożone z dołu i ciągłe wkładów oszczędnościowych (wkłady zgodne i niezgodne).
- Renta kapitałowa. Renta o stałych i zmiennych ratach.
- Ratalna spłata długu. Plan spłaty długów średnioterminowych i długoterminowych. Raty łączne o równych wysokościach. Raty kapitałowe o równych wysokościach. Inne plany spłaty długów.

Sylabus

- Podstawy wyceny wybranych instrumentów rynku pieniężnego. Bony skarbowe. Certyfikaty depozytowe.

- Podstawy wyceny obligacji i akcji.

Literatura

- Podgórska M., Klimkowska J., *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.

- Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W., *Matematyka finansowa*, C.H. Beck, Warszawa, 2011.

Rodzaje kapitalizacji

- Kapitalizacja – dopisywanie odsetek do kapitału
- **Kapitalizacja prosta** – oprocentowaniu podlega tylko kapitał początkowy
- **Kapitalizacja złożona** – oprocentowaniu podlega kapitał początkowy i odsetki
- **Kapitalizacja ciągła**

Rodzaje kapitalizacji

Kapitalizacja: z dołu i z góry

- Kapitalizacja z dołu – odsetki dopisywane na końcu okresu kapitalizacji
- Kapitalizacja z góry – odsetki dopisywane na początku okresu

Kapitalizacja: zgodna i niezgodna

- Kapitalizacja zgodna – okres stopy procentowej = okres kapitalizacji

$$r \rightarrow r/m$$

m - liczba podokresów w okresie np. $m=2$, $m=4$

- Okres kapitalizacji – czas, po którym odsetki dopisuje się do kapitału

Kapitalizacja prosta zgodna z dołu (z góry)

$$K_1 = K_0 + rK_0 = (1 + r)K_0$$

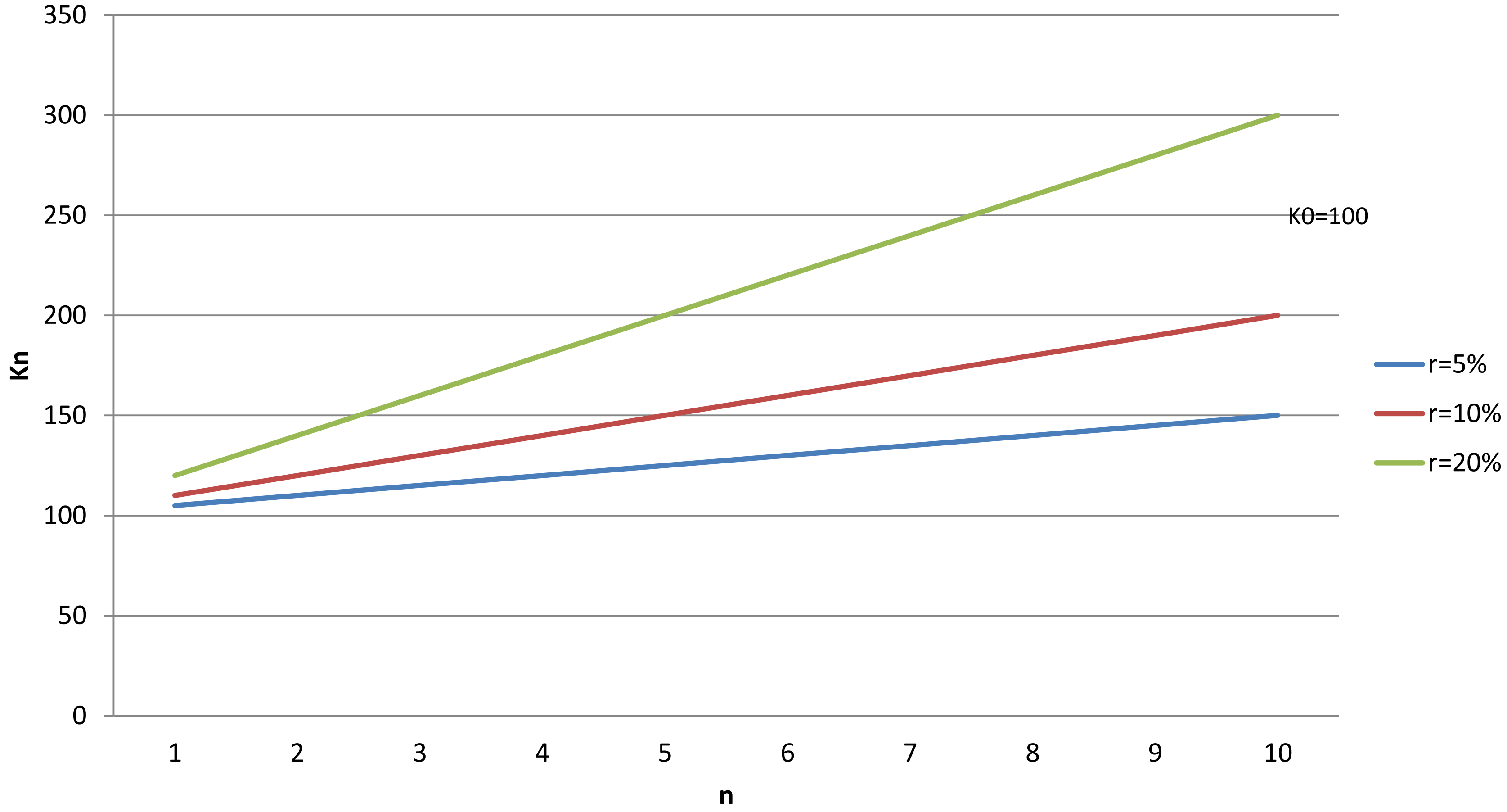
$$K_2 = K_1 + rK_0 = (1 + 2r)K_0$$

$$K_n = (1 + n \cdot r)K_0$$

$$r = \frac{K_n - K_0}{n \cdot K_0}$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{r \cdot K_0}$$

Kapitalizacja prosta zgodna z dołu (z góry)



Kapitalizacja złożona z dołu (zgodna)

$$K_1 = K_0 + rK_0 = K_0 \cdot (1+r)$$

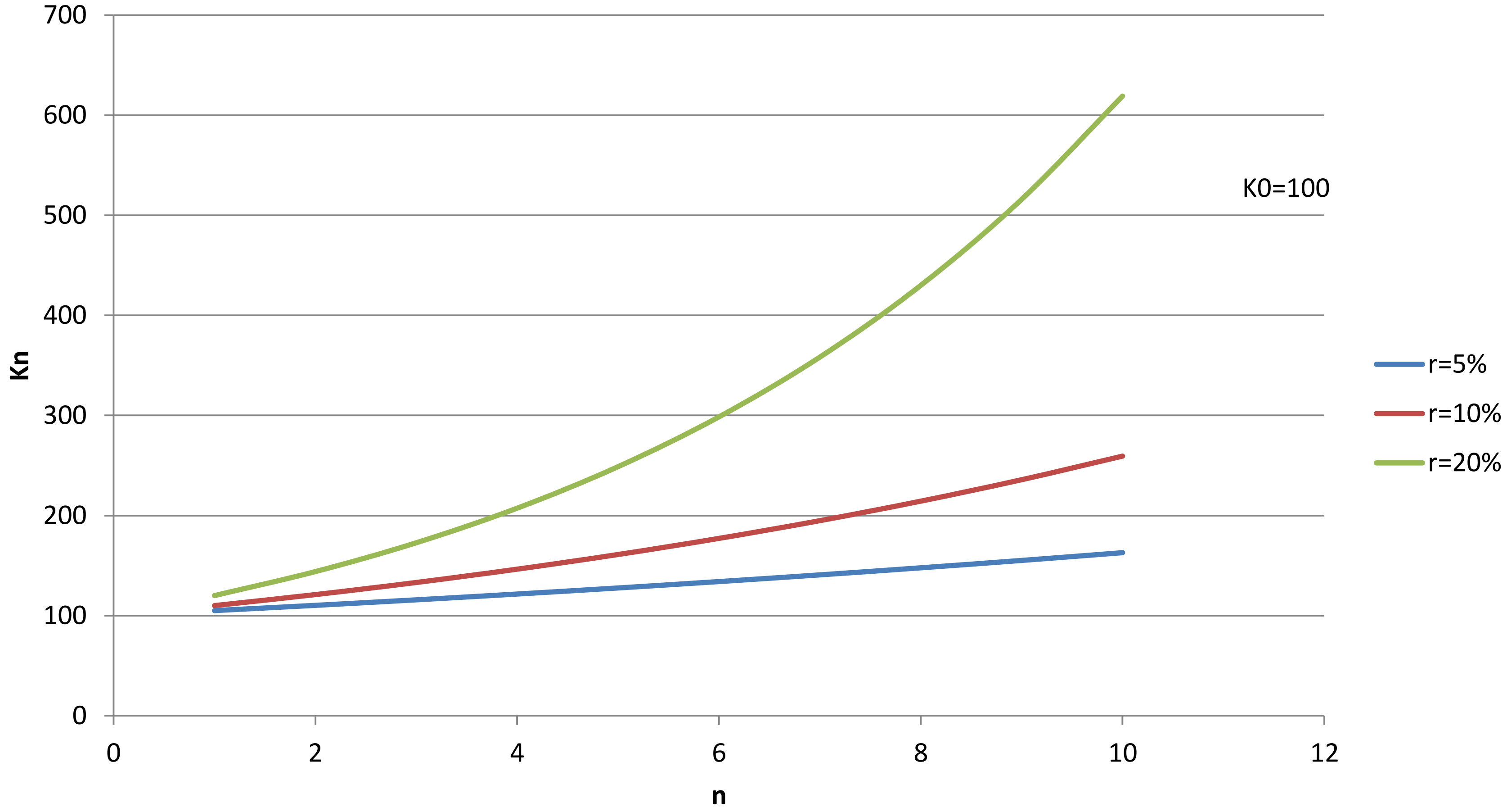
$$K_2 = K_1 + rK_1 = K_0 \cdot (1+r)^2$$

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln(K_n / K_0)}{\ln(1+r)}$$

Kapitalizacja złożona z dołu (zgodna)



Kapitalizacja złożona z góry (zgodna)

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot r + K_0 \cdot r^2 + \ldots$$

$$K_1 = K_0\left(1 + r + r^2 + \ldots\right)$$

$$K_1 = K_0 \cdot (1 - r)^{-1} \qquad |r| < 1$$

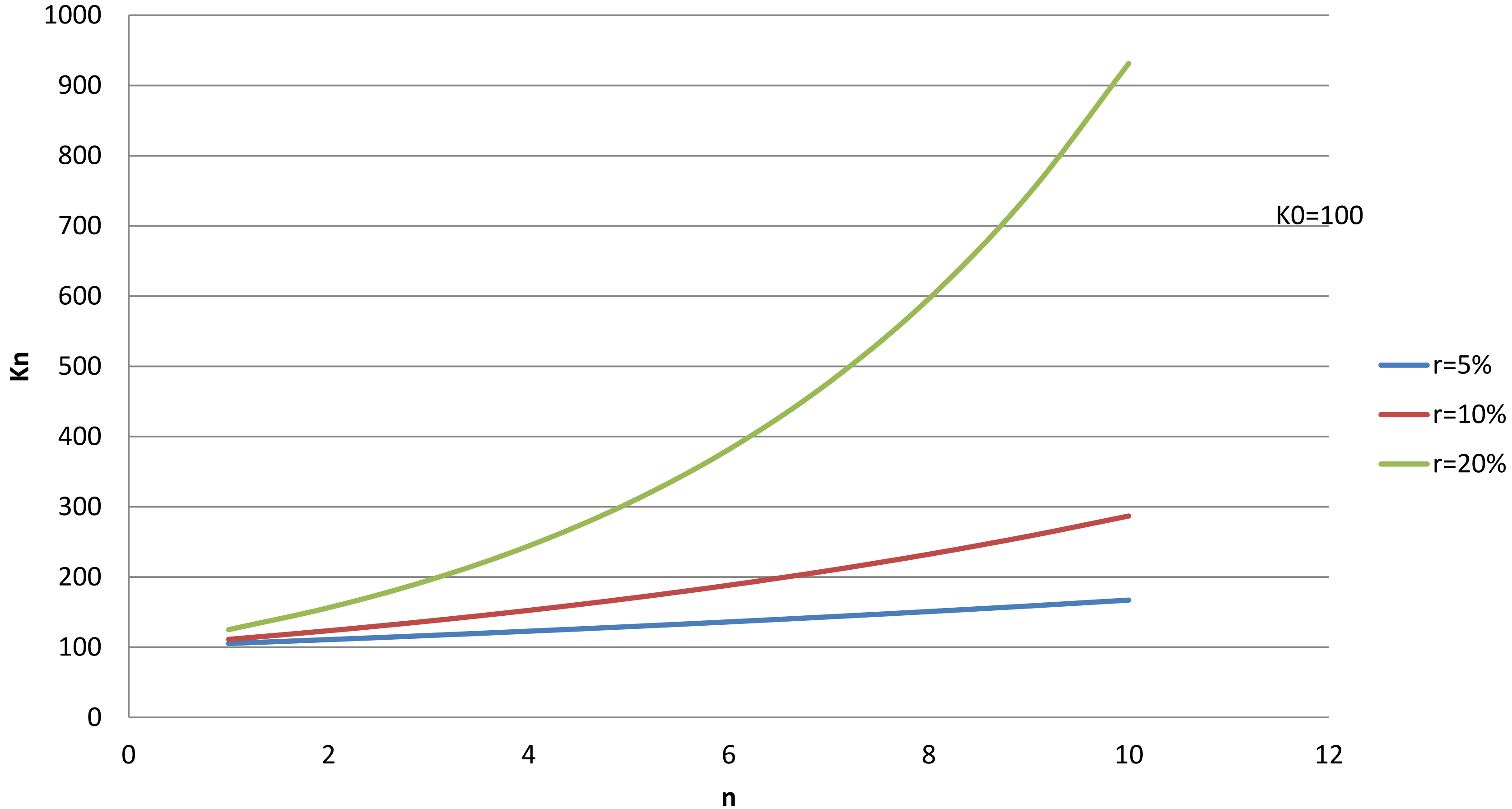
$$K_2 = K_1 \cdot (1 - r)^{-1} = K_0 \cdot (1 - r)^{-2}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 - r)^{-n}$$

$$r = 1 - \sqrt[n]{\frac{K_0}{K_n}}$$

$$n = \frac{\ln\left(K_0 / K_n\right)}{\ln\left(1 - r\right)}$$

Kapitalizacja złożona z góry (zgodna)



Kapitalizacja ciągła

$$K_n = K_0 \cdot e^{n \cdot r}$$

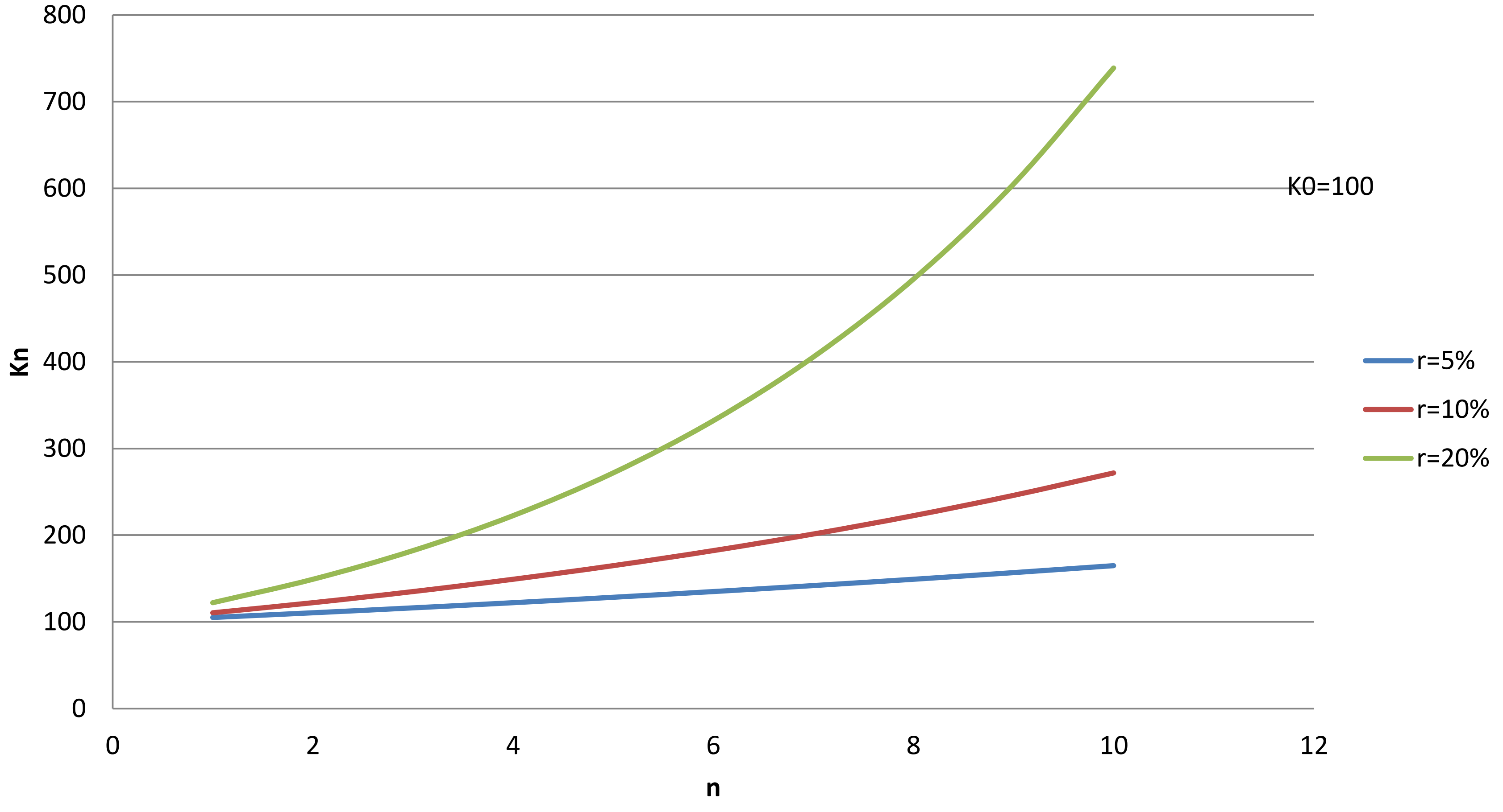
$$\lim_{m \to \infty} K_0 \cdot (1 + \frac{r}{m})^{n \cdot m} = K_0 \cdot e^{n \cdot r}$$

$$\lim_{m \to \infty} K_0 \cdot (1 - \frac{r}{m})^{-n \cdot m} = K_0 \cdot e^{n \cdot r}$$

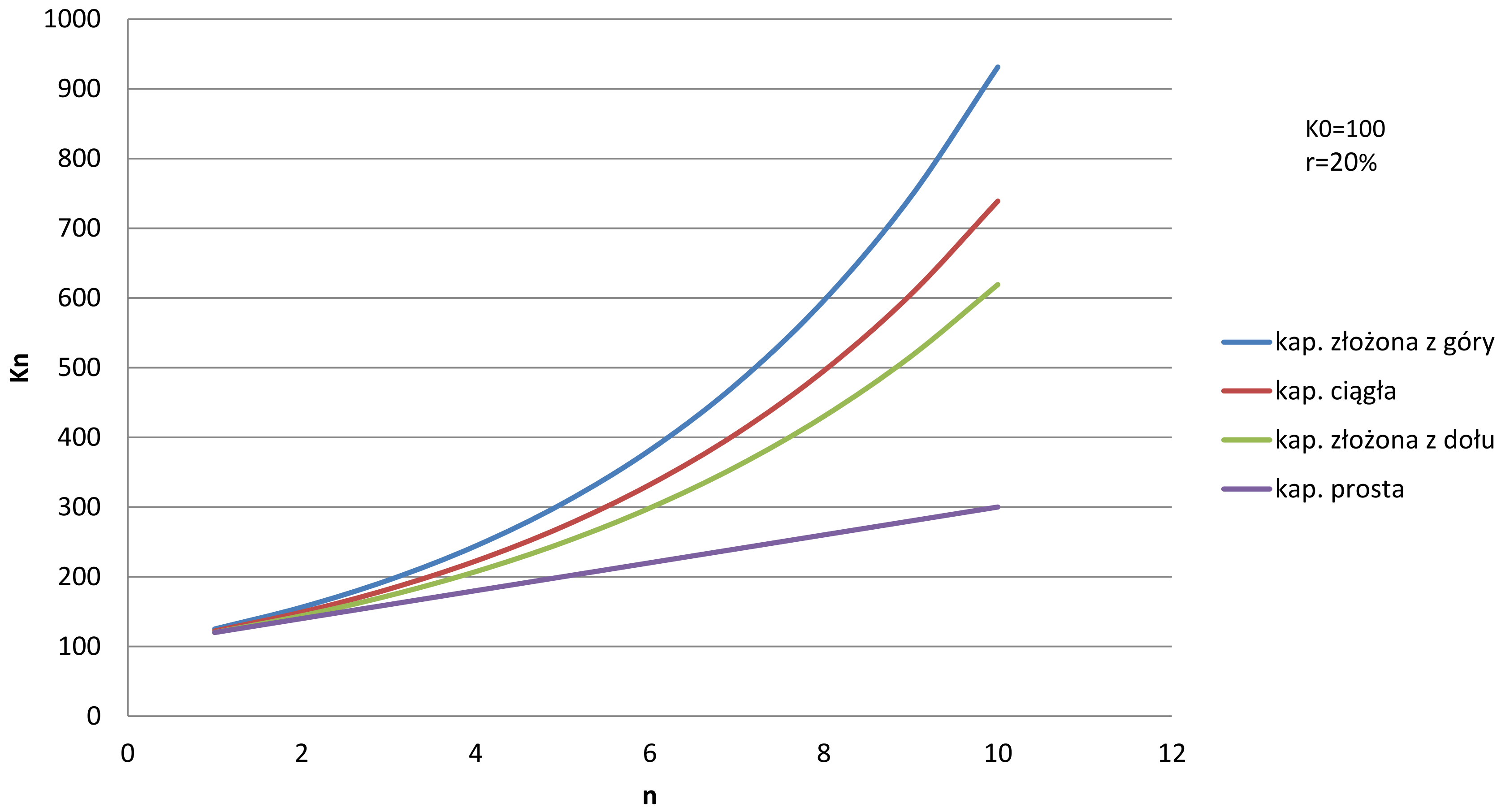
$$r = \frac{\ln(K_n / K_0)}{n}$$

$$n = \frac{\ln(K_n / K_0)}{r}$$

Kapitalizacja ciągła



Kapitalizacja prosta, złożona z dołu, złożona z góry, ciągła – porównanie



Przykłady – kapitalizacja prosta

1. Jaka powinna być kwartalna stopa procentowa oferowana przez bank na warunkach kapitalizacji prostej, aby kwota 5 zł w ciągu 2 lat wzrosła do kwoty 10 zł?

$$K_8 = K_0(1+8r) \qquad \frac{10}{5} - 1 = 8r \qquad r = 12.5\%$$

2. Dla jakiej stopy procentowej po upływie 10 lat nastąpi 7-krotne zwiększenie kapitału w modelu kapitalizacji prostej?

$$7K_0 = K_0(1+10r) \qquad r = 60\%$$

Przykłady – kapitalizacja złożona z dołu i z góry

3. Bank dokonywał przez 2 lata półrocznej kapitalizacji z dołu, a przez następne 3 lata kapitalizacji kwartalnej z góry przy rocznej stopie procentowej 9%. Jaka kwota utworzy po 5 latach wartość 100 zł?

$$K_5 = K_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^4\left(1-\frac{r}{4}\right)^{-12} \qquad K_0 = \frac{100\cdot\left(1-\frac{0.09}{4}\right)^{12}}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^4} = 63.82$$

Przykłady – kapitalizacja złożona z dołu i z góry

4. Ile wynosi roczna stopa procentowa, jeżeli przy rocznej kapitalizacji złożonej z góry odsetki za drugi rok od kwoty 20 zł wynoszą 2,2 zł?

$$2.2 = 20\cdot(1-r)^{-2} - 20\cdot(1-r)^{-1} \qquad x^2 - x - 0.11 = 0$$

$$x = \frac{1}{1-r} \qquad x = 1.1 \qquad r = 9.1\%$$

Kapitalizacja niezgodna

Okres stopy procentowej > okres kapitalizacji

nominalna stopa procentowa → stopa efektywna

Okres stopy procentowej < okres kapitalizacji

nominalna stopa procentowa → stopa równoważna

Kapitalizacja złożona z dołu

	Kapitalizacja roczna	**Kapitalizacja półroczna**	**Kapitalizacja kwartalna**	**Kapitalizacja miesięczna**
Roczna stopa	r	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{2} - 1$	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{4}\right)^{4} - 1$	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} - 1$
Półroczna stopa	$r_r = (1+r)^{1/2} - 1$	$r/2$	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{4}\right)^{2} - 1$	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{6} - 1$
Kwartalna stopa	$r_r = (1+r)^{1/4} - 1$	$r_r = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{1/2} - 1$	$r/4$	$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{3} - 1$
Miesięczna stopa	$r_r = (1+r)^{1/12} - 1$	$r_r = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{1/6} - 1$	$r_r = \left(1+\frac{r}{4}\right)^{1/3} - 1$	$r/12$

Przykład – kapitalizacja złożona z dołu niezgodna

5. Wyznaczyć przyszłą wartość 1 zł po 15 miesiącach, jeżeli obowiązuje kapitalizacja miesięczna złożona z dołu przy rocznej stopie procentowej 18%. Zastosuj stopę efektywną: roczną, półroczną, kwartalną, 15-miesięczną.

Roczna efektywna	$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = 0.196 \quad K_{15} = (1 + r_{ef})^{5/4} = 1.25$
Półroczna efektywna	$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{6} - 1 = 0.093 \quad K_{15} = (1 + r_{ef})^{5/2} = 1.25$
Kwartalna efektywna	$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{3} - 1 = 0.046 \quad K_{15} = (1 + r_{ef})^{5} = 1.25$
15-miesięczna efektywna	$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{15} - 1 = 0.25 \quad K_{15} = (1 + r_{ef}) = 1.25$

Przykład – kapitalizacja złożona z dołu niezgodna

6. Wyznaczyć przyszłą wartość 1 zł po 2 latach, jeżeli obowiązuje kapitalizacja roczna złożona z dołu przy rocznej stopie procentowej 16%.

2-letnia efektywna	$r_{ef} = (1.16)^2 - 1 = 0.3456 \quad K_2 = (1 + r_{ef}) = 1.3456$
Półroczna równoważna	$r_r = (1.16)^{0.5} - 1 = 0.077 \quad K_2 = (1 + r_r)^4 = 1.3456$
Kwartalna równoważna	$r_r = (1.16)^{0.25} - 1 = 0.038 \quad K_2 = (1 + r_r)^8 = 1.3456$
Miesięczna równoważna	$r_r = (1.16)^{1/12} - 1 = 0.012 \quad K_2 = (1 + r_r)^{24} = 1.3456$

Kapitalizacja przy zmiennej stopie procentowej

- Kapitalizacja prosta

$$K_n = K_0\left(1 + n_1 r_1 + n_2 r_2 + \cdots + n_p r_p\right) \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

- Kapitalizacja złożona z dołu

$$K_n = K_0\left(1 + r_1\right)^{n_1}\left(1 + r_2\right)^{n_2}\cdots\left(1 + r_p\right)^{n_p} \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

- Kapitalizacja złożona z góry

$$K_n = K_0\left(1 - r_1\right)^{-n_1}\left(1 - r_2\right)^{-n_2}\cdots\left(1 - r_p\right)^{-n_p} \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

- Kapitalizacja ciągła

$$K_n = K_0 e^{n_1 r_1} e^{n_2 r_2}\cdots e^{n_p r_p} = K_0 e^{n_1 r_1 + n_2 r_2 + \cdots + n_p r_p} \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

Przeciętna stopa procentowa

- Kapitalizacja prosta, kapitalizacja ciągła

$$r_{prz} = \left(n_1 r_1 + n_2 r_2 + \cdots + n_p r_p\right) / n$$

- Kapitalizacja złożona z dołu

$$r_{prz} = \sqrt[n]{\left(1+r_1\right)^{n_1}\left(1+r_2\right)^{n_2}\cdots\left(1+r_p\right)^{n_p}} - 1$$

- Kapitalizacja złożona z góry

$$r_{prz} = 1 - \sqrt[n]{\left(1-r_1\right)^{n_1}\left(1-r_2\right)^{n_2}\cdots\left(1-r_p\right)^{n_p}}$$

Przykład – zmienna stopa procentowa

7. Spółka zaciągnęła 4 krótkoterminowe pożyczki w 4 bankach przy następujących warunkach:

- w banku A 1000 zł na 2 miesiące przy oprocentowaniu 18% w skali roku,
- w banku B 1200 zł na 4 miesiące, oprocentowanie 20% w skali roku,
- w banku C 1100 zł na 3 miesiące, oprocentowanie 19% w skali roku,
- w banku D 1300 zł na 5 miesiące, oprocentowanie 21% w skali roku.

Czy sytuacja spółki byłaby korzystniejsza, jeśli oprocentowanie wszystkich pożyczek byłoby jednakowe i wynosiło 19,5% w skali roku?

$$K_n = 1000\left(1+2\cdot\frac{0.18}{12}\right)+1200\left(1+4\cdot\frac{0.2}{12}\right)+1100\left(1+3\cdot\frac{0.19}{12}\right)+1300\left(1+5\cdot\frac{0.21}{12}\right)$$

$$K_n = 1000\left(1+2\cdot\frac{r_{prz}}{12}\right)+1200\left(1+4\cdot\frac{r_{prz}}{12}\right)+1100\left(1+3\cdot\frac{r_{prz}}{12}\right)+1300\left(1+5\cdot\frac{r_{prz}}{12}\right)$$

$$r_{prz} = 19.95\% > 19.5\%$$