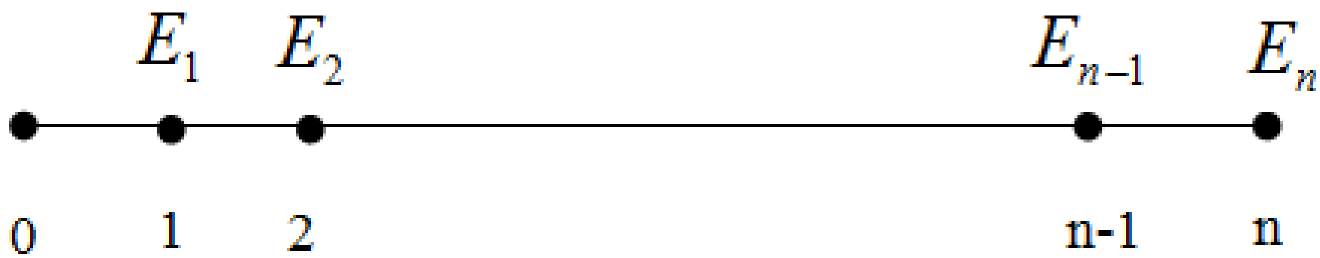
Arytmetyka finansowa

Dr Wioletta Nowak

Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + E_1(n-1)r + E_2(n-2)r + \cdots + E_{n-1}r$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + E_1 n \cdot r + E_2(n-1)r + \cdots + E_n r$$

Oprocentowanie proste wkładów oszczędnościowych

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} r\right)$$

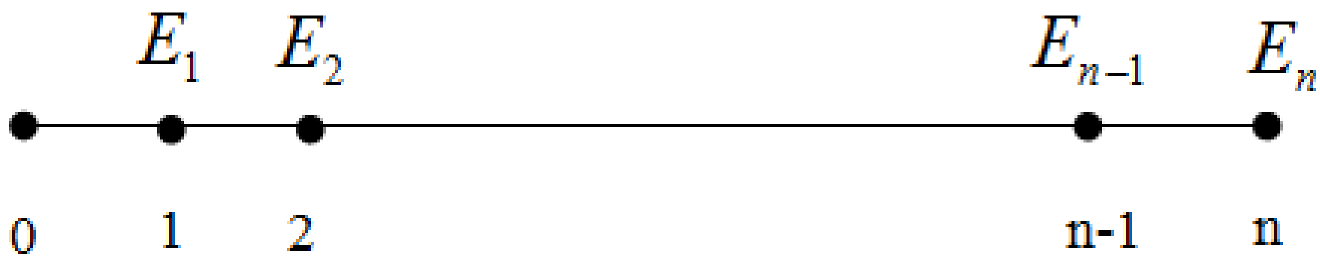
Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n+1}{2} r\right)$$

$$K_0 = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n \pm 1}{2} r\right) \frac{1}{1 + n \cdot r}$$

$$K_t = E \cdot n \cdot \left(1 + \frac{n \pm 1}{2} r\right) \frac{1 + t \cdot r}{1 + n \cdot r} \qquad t \in (0, n)$$

Oprocentowanie złożone wkładów



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1(1+r)^{n-1} + E_2(1+r)^{n-2} + \cdots + E_{n-1}(1+r) + E_n$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1(1+r)^{n} + E_2(1+r)^{n-1} + \cdots + E_n(1+r)$$

Oprocentowanie złożone wkładów

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

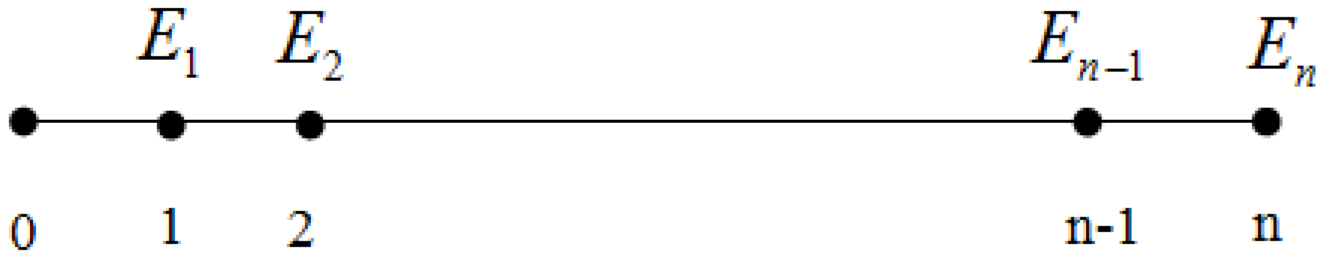
Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

$$K_t = \frac{K_n}{(1+r)^{n-t}} \quad t \in (0, n)$$

Oprocentowanie ciągłe wkładów



Wkłady z dołu

$$K_n = E_1 \cdot e^{(n-1)r} + E_2 \cdot e^{(n-2)r} + \cdots + E_{n-1} \cdot e^{r} + E_n$$

Wkłady z góry

$$K_n = E_1 \cdot e^{n \cdot r} + E_2 \cdot e^{(n-1)r} + \cdots + E_n \cdot e^{r}$$

Oprocentowanie ciągłe wkładów

jednakowe wkłady E

Wkłady z dołu

$$K_n = E \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

Wkłady z góry

$$K_n = E \cdot e^r \cdot \frac{e^{n \cdot r} - 1}{e^r - 1}$$

$$K_t = K_n \cdot e^{-(n-t) \cdot r} \qquad t \in (0, n)$$

$$K_0 = E \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

$$K_0 = E \cdot e^r \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot r}}{e^r - 1}$$

Przykład 1

- Przez ile lat należy wpłacać <u>na początku</u> każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.

Przykład 1

$$K_n = E \cdot (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{r \cdot K_n}{E \cdot (1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = 6.43$$

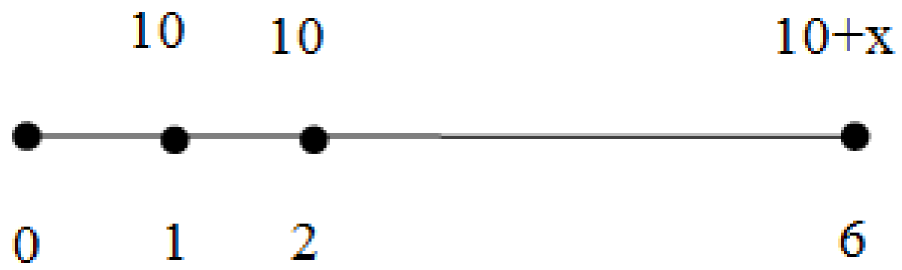
- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

Przykład 1 - dodatkowa niepełna wpłata

$$\left(K_6 + x\right)\cdot\left(1 + r\right) = 100$$

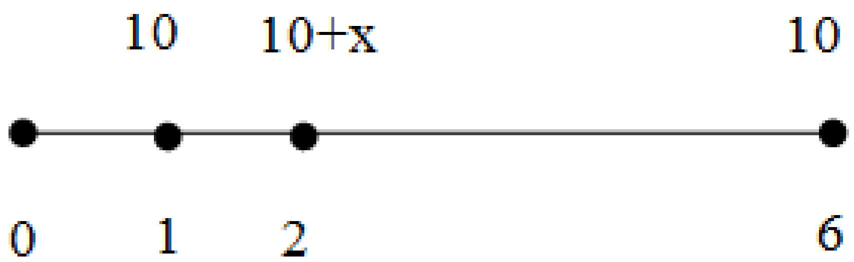
$x = -1.60$ (Rozwiązanie odrzucić)

Przykład 1 - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x \cdot (1+r) = 100$$

$$x = 8.13$$



$$K_6 + x \cdot (1+r)^5 = 100$$

$$x = 5.17$$

Przykład 1 – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}$$

$n = 6$ $\quad\quad\quad$ $E = 11.00$

Przykład 1a

- Przez ile lat należy wpłacać na końcu każdego roku kwotę 10 zł, by przyszła wartość wkładów była równa 100 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 12% (kapitalizacja złożona z dołu).
- Zaproponuj różne warianty rozwiązania problemu niepełnej liczby lat.

Przykład 1a

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{r \cdot K_n}{E} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = 6.96$$

- Dodatkowa niepełna wpłata
- Powiększenie jednej z wpłat
- Zaokrąglenie liczby wpłat do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych wkładów

Przykład 1a - dodatkowa niepełna wpłata

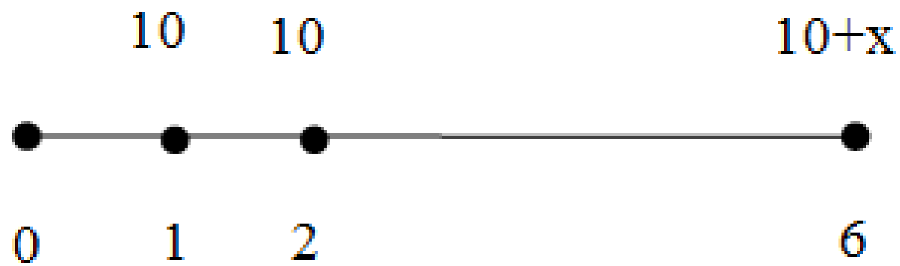
$$K_6 \cdot (1+r) + x = 100$$

$$K_n = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

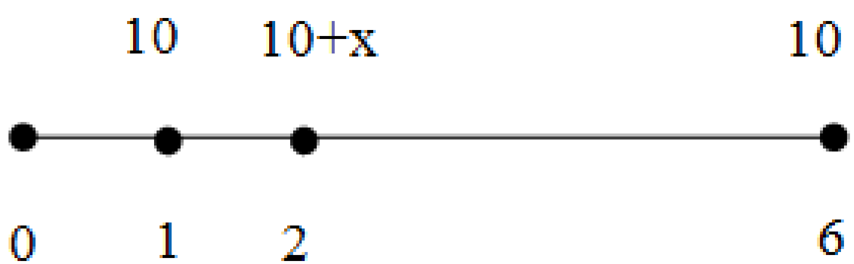
$$x = 9.11$$

$$K_6 = 81.15$$

Przykład 1a - powiększenie jednej z wpłat



$$K_6 + x = 100$$
$$x = 18.85$$



$$K_6 + x \cdot (1+r)^4 = 100$$
$$x = 11.98$$

Przykład 1a – nowe wpłaty

$$E = \frac{r \cdot K_n}{(1+r)^n - 1}$$

$n = 7$ $E = 9.91$

Renta o stałych ratach

$$K_N = K(1+r)^N - A_N$$

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

$$K = \frac{a\cdot(1+r)}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Wysokość renty

$$a = \frac{K\cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$a = \frac{1}{1+r}\,\frac{K\cdot r}{\left(1-(1+r)^{-N}\right)}$$

Renta o stałych ratach

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Okres wypłacania renty

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1+r)}$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{(1+r) \cdot a}\right)}{\ln(1+r)}$$

Renta wieczysta

- Renta wypłacana z dołu
- Renta wypłacana z góry

Kapitał rentowy

$$K = \frac{a_w}{r}$$

$$K = \frac{a_w \cdot (1+r)}{r}$$

$$K = \lim_{N \to \infty} \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) = \frac{a}{r}$$

Przykład 1 – renta wypłacana z dołu

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.1	11.5
2	11.5	11.9	4.1	7.8
3	7.8	8.1	4.1	4.0
4	4.0	4.1	4.1	0

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 1a – renta wypłacana z góry

$N = 4 \qquad K = 15 \qquad r = 4\%$

N	K_{N-1}	$(1+r)K_{N-1}$	a	K_N
1	15.0	15.6	4.0	11.0
2	11.0	11.5	4.0	7.5
3	7.5	7.8	4.0	3.8
4	3.8	4.0	4.0	0

$$a = \frac{1}{1+r}\frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-N}}$$

$$K_N = (1+r)K_{N-1} - a$$

Przykład 2

- Jaka powinna być stopa procentowa by z kapitału 100 zł można było wypłacać 12 zł przez 10 lat

a) z dołu

$$r = 3.46\%$$

$$1 = (1+r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)$$

b) z góry

$$r = 4.304\%$$

$$1 = (1+r)^N \left(1 - \frac{r \cdot K}{(1+r) \cdot a}\right)$$

Przykład 3

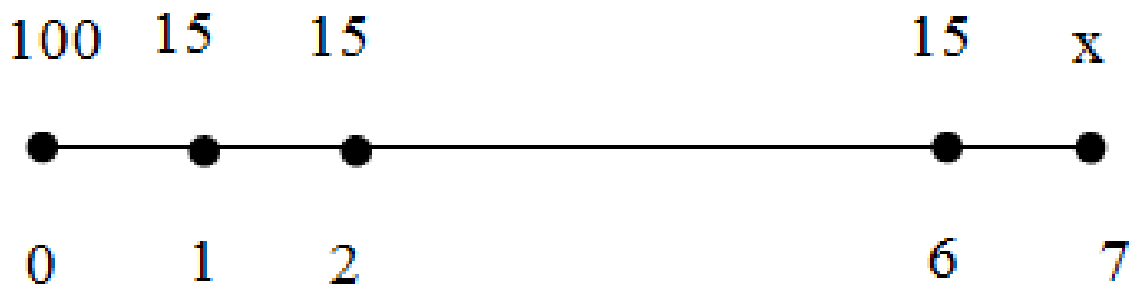
- Przez ile lat można z 100 zł stałą rentę roczną z dołu w wysokości 15 zł? Roczna stopa procentowa 1%.

$$N = 6.93$$

$$N = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r \cdot K}{a}\right)}{\ln(1 + r)}$$

- Dodatkowa niepełna renta
- Powiększenie jednej z rent
- Zaokrąglenie liczby rent do najbliższej liczby naturalnej i policzenie nowych rent

Przykład 3 - Dodatkowa niepełna renta



$$\left(K(1+r)^6 - A_6\right)\cdot(1+r) = x$$

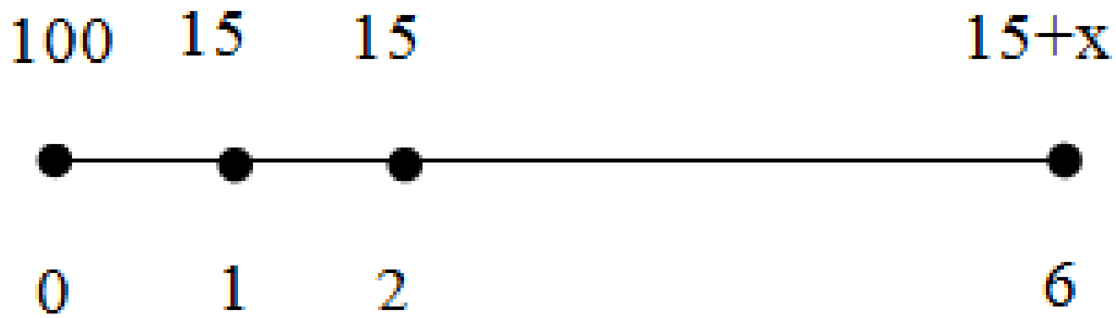
$$A_6 = a\cdot\frac{(1+r)^6 - 1}{r}$$

$$K(1+r)^6 - A_6 = \frac{x}{1+r}$$

$$x = 14.011$$

$$K = \frac{A_6}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^7}$$

Przykład 3 - Powiększenie jednej z rent



$$K(1+r)^6 - A_6 = x$$

$$x = 13.87$$

Przykład 3 – Nowa renta stała

$$a = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-7}} \qquad a = \frac{100 \cdot 0.01}{1-(1+0.01)^{-7}} = 14.86$$