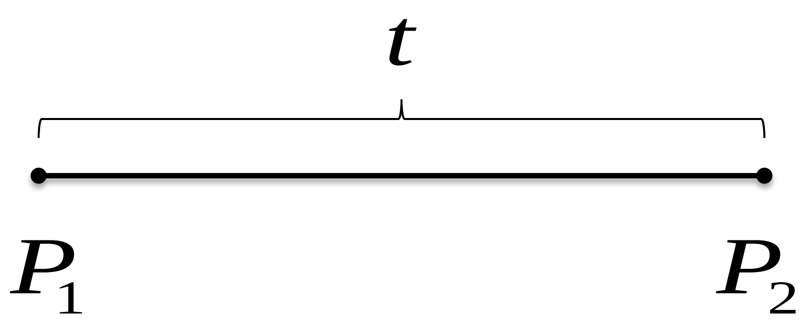
Arytmetyka finansowa

Dr Wioletta Nowak

Bon skarbowy

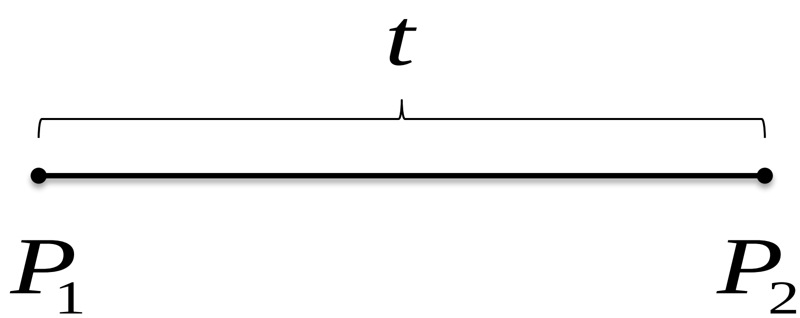
- Instrument dłużny, emitowany przez Skarb Państwa za pośrednictwem Ministerstwa Finansów.
- **Termin wykupu** – dzień w którym emitent dokonuje wykupu, Skarb Państwa zwraca dług posiadaczowi bonu skarbowego. W Polsce – najczęściej bony 13, 26 lub 52-tygodniowe.
- **Wartość nominalna** – wartość, którą Skarb Państwa płaci posiadaczowi w terminie wykupu (w Polsce 10000 PLN).
- **Cena bonu skarbowego** – sprzedaż z dyskontem, po cenie niższej od wartości nominalnej.

Bony skarbowe



- P_1 – cena zakupu bonu
- P_2 – wartość nominalna bonu
- t – liczba dni od daty zakupu do dnia wykupu

Bony skarbowe – stopa rentowności



$$r = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot \frac{360}{t}$$

- Stopa rentowności (dochodowości) – relacja dochodu uzyskanego z tytułu inwestycji w bon skarbowy do ceny zakupu bonu, przy czym wartość przeliczona w skali roku.

Bony skarbowe – wyprowadzenie wzoru na roczną stopę rentowności

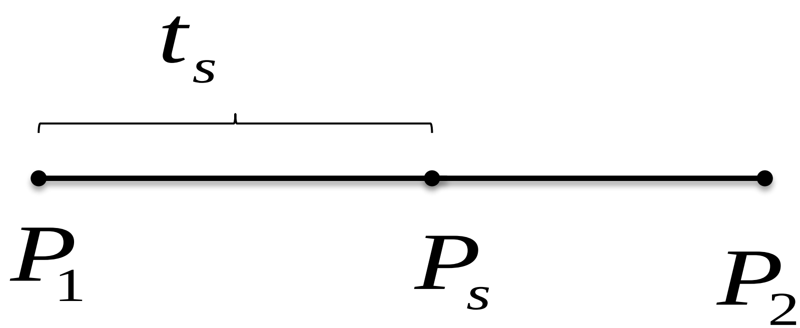
$$\overbrace{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}^{t}$$

$$P_1 \qquad\qquad\qquad\qquad P_2$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad \rightarrow \quad t$$

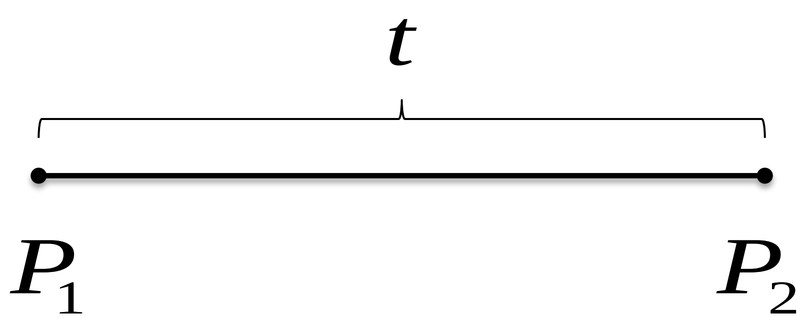
$$r \quad \rightarrow \quad 360$$

Bony skarbowe – stopa zwrotu w okresie posiadania bonu



$$r_s = \frac{P_s - P_1}{P_1} \cdot \frac{360}{t_s}$$

Bony skarbowe – stopa dyskontowa



$$d = \frac{P_2 - P_1}{P_2} \cdot \frac{360}{t}$$

- Stopa dyskontowa – relacja dochodu uzyskanego z tytułu inwestycji w bon skarbowy do wartości nominalnej bonu, przy czym wartość przeliczona w skali roku.

Bony skarbowe – obliczanie ceny bonu

- Cena zakupu (za 100 zł wartości bonu) przy danej stopie dochodowości.

$$P = \frac{360}{r \cdot t + 360} \cdot 100$$

- Cena zakupu (za 100 zł wartości bonu) przy danej stopie dyskontowej

$$P = \left(1 - \frac{d \cdot t}{360}\right) \cdot 100$$

Bony skarbowe – związek między stopą dochodowości a stopą dyskontową

$$\frac{360}{r \cdot t + 360} \cdot 100 = \left(1 - \frac{d \cdot t}{360}\right) \cdot 100$$

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot \frac{t}{360}}$$

$$d = \frac{r}{1 + r \cdot \frac{t}{360}}$$

Przykład 1 – bony skarbowe

Inwestor nabywa na rynku pierwotnym 26-tygodniowe bony skarbowe o nominale 1,5 mln zł po cenie 97,9005 za 100 zł.

- Jaką kwotę musi zapłacić za zakupione bony?

$$9790{,}05 \cdot 150 = 1468508$$

- Jaka jest stopa rentowności nabytych instrumentów?

$$r = \frac{100 - 97{,}9005}{97{,}9005} \cdot \frac{360}{182} = 0{,}04242$$

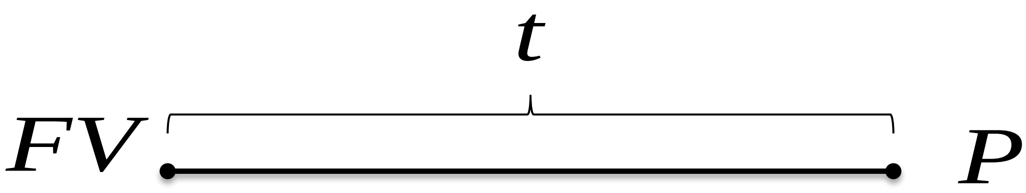
- Z jaką stopą dyskontową inwestor nabył bony?

$$d = \frac{100 - 97{,}9005}{100} \cdot \frac{360}{182} = 0{,}04153$$

Certyfikat depozytowy

- Instrument dłużny, emitowany przez bank w celu pozyskania środków finansowych.
- Różni się od zwykłego depozytu tym, że można nim obracać na rynku, np. można go odsprzedać bankowi, w którym został kupiony.
- Emitowany w dużych i okrągłych kwotach

Certyfikat depozytowy – instrument finansowy z kuponem



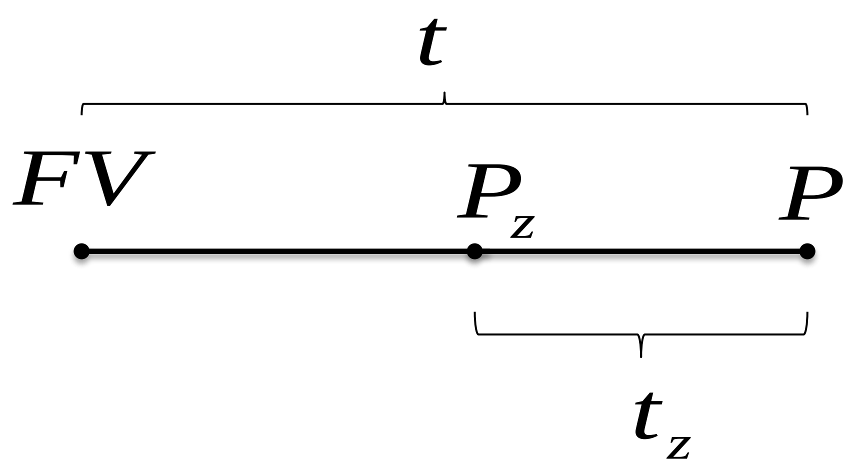
Wartość nominalna
(*face value*)

Cena instrumentu
w dniu wykupu

$$P = FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360} \right)$$

r_k - stopa oprocentowania certyfikatu depozytowego

Wartość certyfikatu depozytowego

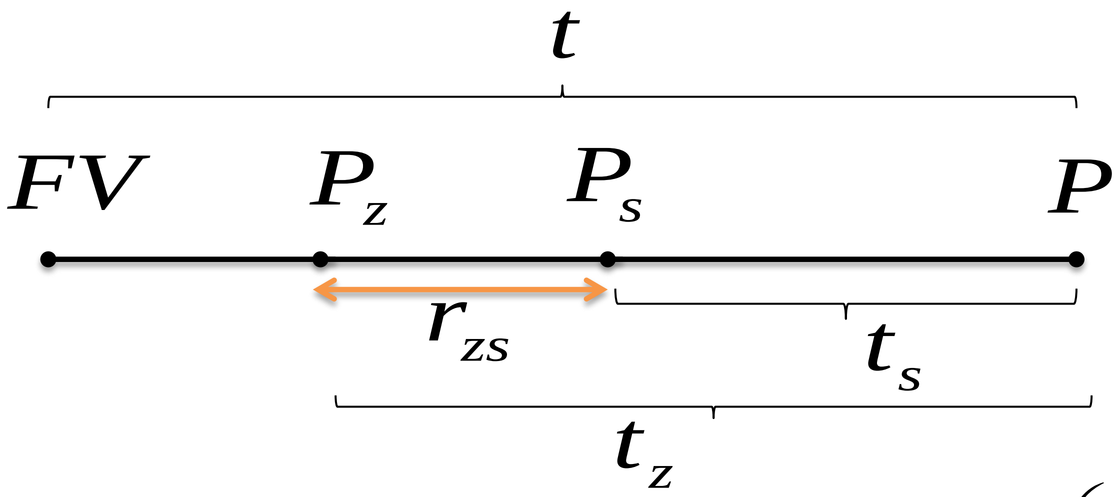


$$FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right) = P_z \cdot \left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)$$

$$P_z = \frac{FV \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}$$

$$\boxed{P_z = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}}$$

Rentowność certyfikatu depozytowego w okresie posiadania



$$r_{zs} = \frac{P_s - P_z}{P_z} \cdot \frac{360}{t_z - t_s}$$

$$P_z = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}\right)}$$

$$\boxed{r_{zs} = \left(\frac{1 + r_z \cdot \frac{t_z}{360}}{1 + r_s \cdot \frac{t_s}{360}} - 1 \right) \cdot \frac{360}{t_z - t_s}}$$

$$P_s = \frac{100 \cdot \left(1 + r_k \cdot \frac{t}{360}\right)}{\left(1 + r_s \cdot \frac{t_s}{360}\right)}$$

Przykład 2 – certyfikat depozytowy

- Inwestor nabywa na rynku pierwotnym 13-tygodniowy certyfikat depozytowy o wartości nominalnej 1 mln zł i dochodowości 20%.
- Jaka jest wartość certyfikatu w dniu wykupu?

91 dni

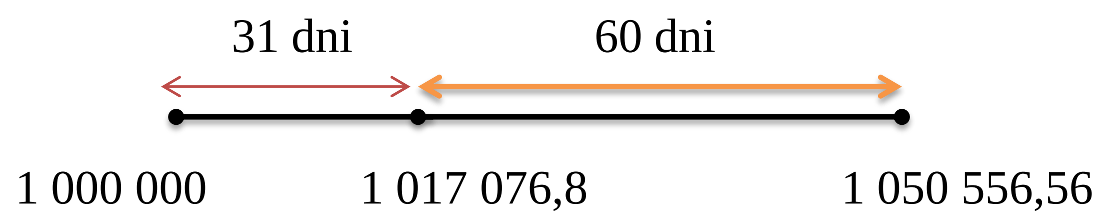
1 000 000 $\quad r_k = 0{,}2 \quad$ 1 050 556,56

100 zł $\quad$ 105,0556 zł

$$P = 1000000 \cdot \left(1 + 0{,}2 \cdot \frac{91}{360}\right) = 1050556{,}556$$

Przykład 2 cd.

- Po 31 dniach inwestor sprzedaje certyfikat z dochodowością 19,75%.



$$P_s = \frac{1000000 \cdot \left(1 + 0{,}2 \cdot \frac{91}{360}\right)}{\left(1 + 0{,}1975 \cdot \frac{60}{360}\right)} = 1017076{,}8$$

101,7077 - cena brudna

101,7077-1,7222=99,9855 - cena czysta

Odsetki za 100 zł wartości nominalnej

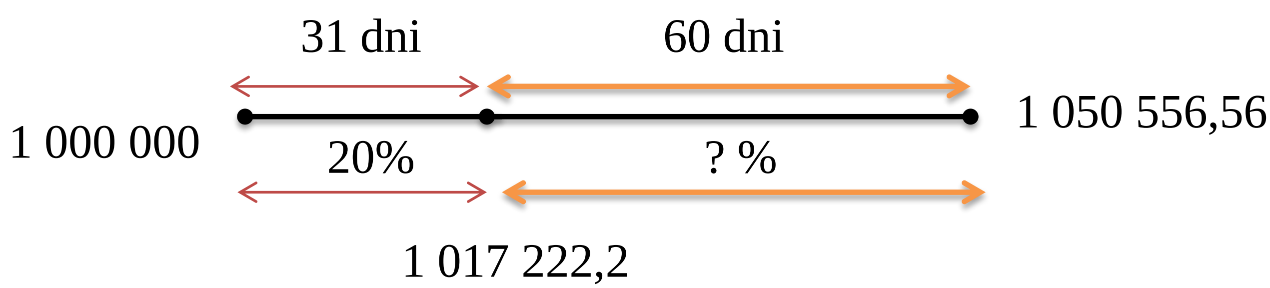
$$100 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 31}{360} = 1{,}722$$

1 017 076,8-17 222,2= 999 854,6

-145,4 zł - strata

Przykład 2 cd.

- Z jaką dochodowością inwestor powinien sprzedać certyfikat by nie ponieść straty?



$$P_s = 1000000 \cdot \left(1 + 0{,}2 \cdot \frac{31}{360}\right) = 1017222{,}2$$

$$r_s = \frac{1050556{,}56 - 1017222{,}2}{1017222{,}2} \cdot \frac{360}{60} = \boxed{0{,}1966}$$

Weksle

- **Wartość nominalna** (suma weksla) – kwota do zapłaty której zobowiązuje weksel.
- **Termin wykupu** (spłaty) – termin w którym weksel ma być spłacony.
- **Wartość aktualna** (handlowa) – wartość obliczona na podstawie wartości nominalnej przy ustalonej stopie dyskontowej na określony dzień poprzedzający termin wykupu.
- W odniesieniu do weksli czas oblicza się w dniach i zamienia na lata według reguły bankowej (dokładna liczba dni/długość roku bankowego (tzn. 360 dni))

Dygresja – rachunek czasu oprocentowania stosowany w matematyce finansowej

	Liczba lat kalendarzowych (czas w dniach/365)	**Liczba lat bankowych (czas w dniach/360)**
Dokładna liczba dni, obliczona według roku kalendarzowego	$\frac{271-74}{365}=\frac{197}{365}$	reguła bankowa $\frac{197}{360}$
Bankowa (przybliżona) liczba dni, obliczona według czasu bankowego (rok bankowy – 360 dni, miesiąc bankowy – 30 dni)	$\frac{193}{365}$	$\frac{193}{360}$

Okres: 15 marzec (74) – 28 wrzesień (271) 2011

Bankowa liczba dni oprocentowania 30-15 +5*30+28=193

Dyskontowanie weksli

$$W_a = W_n - D_H \qquad D_H = W_n \cdot d \cdot \frac{t}{360}$$

$$W_a = W_n\left(1 - d \cdot \frac{t}{360}\right) \qquad W_n = W_a \cdot \frac{360}{360 - d \cdot t}$$

gdzie:

W_a – wartość aktualna W_n – wartość nominalna

D_H – dyskonto d – stopa dyskontowa

t – czas od momentu przedłożenia weksla do dyskonta do terminu jego płatności

Przykład 3 – weksle

- W dniu 12 lipca przedłożono do dyskonta weksel o wartości nominalnej 50 000 zł. Obowiązująca w dniu dyskontowania stopa dyskontowa wynosiła 6% w skali roku, a termin płatności weksla upływa 5 września tego samego roku. Obliczyć dyskonto oraz aktualną wartość rynkową weksla.

$t = 248 - 193 = 55 \qquad W_n = 50000 \qquad d = 0{,}06$

$$D_H = \frac{50000 \cdot 0{,}06 \cdot 55}{360} = 458{,}33$$

$$W_a = 50000 - 458{,}33 = 49541{,}67$$

Liczby procentowe

$$D_H = W_n \cdot d \cdot \frac{t}{360} \qquad \text{lub} \qquad D_H = \frac{W_n \cdot t}{360/d}$$

$$D_H = \frac{L\%}{dz.}$$

gdzie: $L\% = W_n \cdot t$ – liczba procentowa

$dz. = 360/d$ – dzielnik

Równoważność weksli

- Dwa weksle w wartościach nominalnych W_{n1} i W_{n2} są równoważne w ustalonym dniu poprzedzającym ich wykup o czas, odpowiednio t_1 i t_2, jeśli wartości aktualne obu weksli obliczone na ten dzień przy stopie dyskontowej d są równe.

Przykład 4 – weksel równoważny

- Dłużnik ma do spłacenia dwa weksle o wartości nominalnej 20000 i 50000. Termin wykupu pierwszego upływa za 10 dni, a drugiego za 20 dni. Obliczyć wartość nominalną weksla równoważnego tym wekslom, jeśli stopa dyskontowa wynosi 7%, termin płatności weksla równoważnego wynosi 12 dni.

$$W_{ar} = W_{a1} + W_{a2}$$

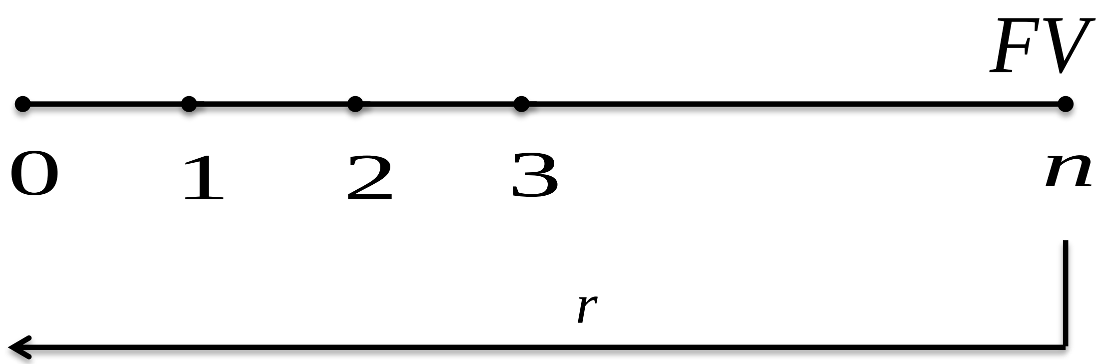
$$W_a = W_n \left(1 - d \cdot \frac{t}{360}\right)$$

$$W_{nr}\left(1 - \frac{0{,}07 \cdot 12}{360}\right) = 20000\left(1 - \frac{0{,}07 \cdot 10}{360}\right) + 50000\left(1 - \frac{0{,}07 \cdot 20}{360}\right)$$

$$W_{nr} = 69929{,}84$$

Podstawy wyceny obligacji – obligacja zerokuponowa

- **Obligacja zerokuponowa**, FV – wartość nominalna obligacji, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, r – wymagana stopa dochodu inwestora, P – wartość obligacji



$$P = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

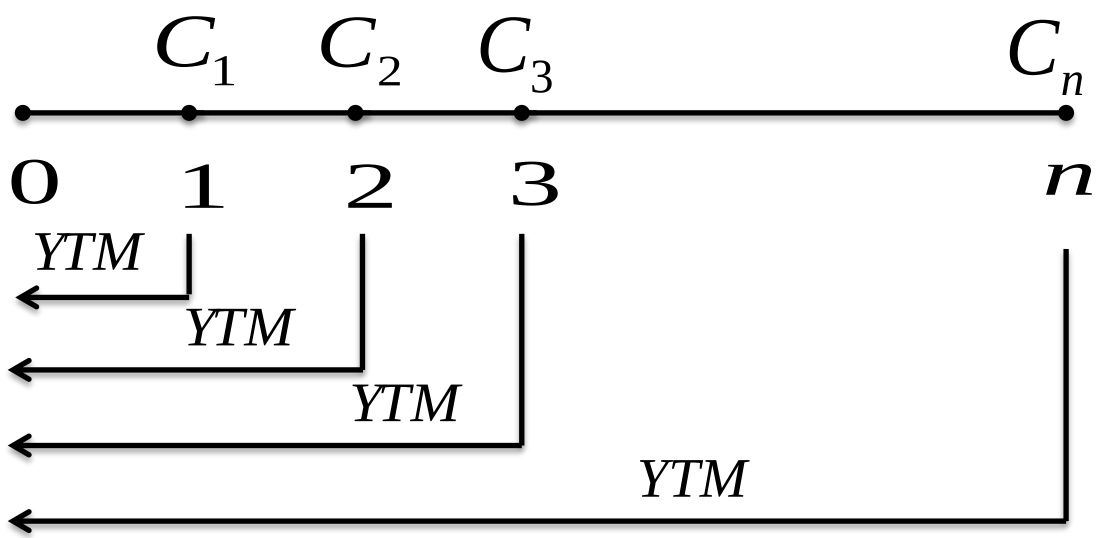
Przykład 5 – cena obligacji zerokuponowej

- Dana jest obligacja zerokuponowa z terminem wykupu 1,5 roku o wartości nominalnej 100. Wymagana stopa dochodu inwestora wynosi 5%. Oblicz cenę obligacji.

$$P = \frac{100}{(1+0,05)^{1,5}} = 92,94$$

Podstawy wyceny obligacji – obligacja kuponowa

- **Obligacja kuponowa**, C_i – dochód z tytułu posiadania obligacji uzyskany w okresie *i*, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, *YTM* (*yield to maturity*) – stopa dochodu w okresie do wykupu, P – wartość obligacji



$$P = \frac{C_1}{1+YTM} + \frac{C_2}{(1+YTM)^2} + \quad \cdots \quad + \frac{C_n}{(1+YTM)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+YTM)^i}$$

Podstawy wyceny obligacji – obligacja o stałym kuponie

- **Obligacja o stałym kuponie**, C – odsetki, M – wartość nominalna obligacji, n – liczba okresów do terminu wykupu obligacji, YTM – stopa dochodu w okresie do wykupu, P – wartość obligacji

$$P = \frac{C}{1+YTM} + \frac{C}{(1+YTM)^2} + \quad \cdots \quad + \frac{C+M}{(1+YTM)^n}$$

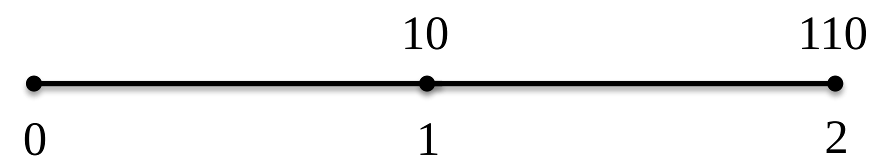
$$P = \frac{C}{1+YTM}\left(1 + \frac{1}{1+YTM} + \quad \cdots \quad + \frac{1}{(1+YTM)^{n-1}}\right) + \frac{M}{(1+YTM)^n}$$

$$\boxed{P = C \cdot \frac{1-(1+YTM)^{-n}}{YTM} + \frac{M}{(1+YTM)^n}}$$

Przykład 6 – wartość obligacji kuponowej

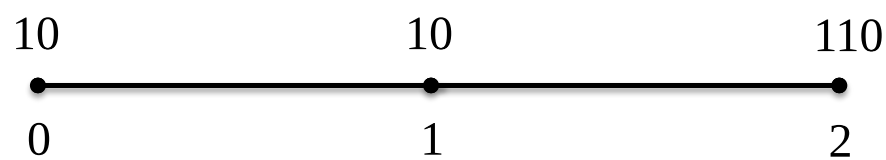
- Dana jest obligacja, o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%. Stopa dochodu w okresie do wykupu tej obligacji wynosi 9%. Oblicz wartość obligacji, gdy termin do wykupu wynosi 2 lata po płatności oraz 2 lata przed płatnością.
- po płatności

$$P = \frac{10}{1,09} + \frac{110}{(1,09)^2} = 101,76$$



- przed płatnością

$$P = 10 + \frac{10}{1,09} + \frac{110}{(1,09)^2} = 111,76$$



Przykład 7 – wartość obligacji

- Dana jest obligacja o stałym oprocentowaniu z terminem do wykupu 2 lata i 6 miesięcy, o wartości nominalnej 100, oprocentowaniu nominalnym 10%. Stopa dochodu w okresie do wykupu wynosi 8%. Odsetki płacone są co roku. Oblicz wartość obligacji.

$$P = \frac{10}{(1{,}08)^{0{,}5}} + \frac{10}{(1{,}08)^{1{,}5}} + \frac{110}{(1{,}08)^{2{,}5}} = 109{,}28$$

Wycena konsoli (obligacji wieczystej)

- Obligacja ze stałym kuponem. Emitent przy emisji zobowiązuje się płacić ich posiadaczom stały dochód przez czas nieograniczony.

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \quad \cdots$$

$$\boxed{P = \frac{C}{r}}$$

- C – wartość kuponu, *r* – rentowność do wykupu obligacji,

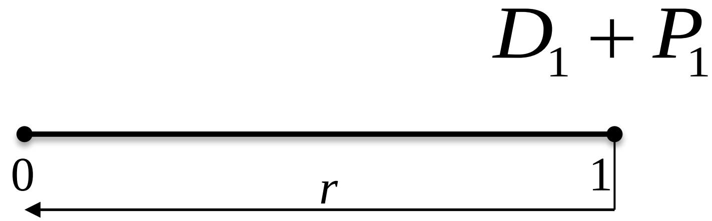
Modele wyceny akcji

- Model stałej wartości dywidendy
- Model stałego wzrostu dywidendy – model Gordona-Shapiro
- Model zmiennego wzrostu dywidendy
  - model dwufazowy
  - model wielofazowy

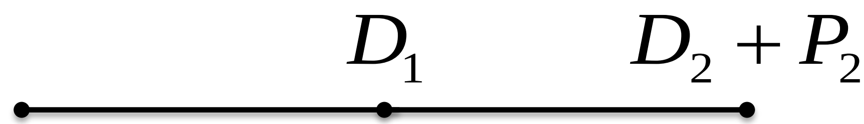
Podstawowy model wyceny akcji – model zdyskontowanych dywidend

1. Inwestor chce kupić akcję, przetrzymać rok i sprzedać po tym okresie. Oczekuje dywidendy na koniec roku.

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{P_1}{1+r}$$



2. Jeśli inwestor przetrzyma akcję o kolejny rok



$$P_1 = \frac{D_2}{1+r} + \frac{P_2}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}$$

Podstawowy model wyceny akcji – model zdyskontowanych dywidend

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}$$

$$P_2 = \frac{D_3}{1+r} + \frac{P_3}{1+r}$$

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$n \to \infty$$

$$\boxed{P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}}$$

Model stałej wartości dywidendy

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}$$

$$P = D \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k}$$

$$P = D \cdot \frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}$$

$$\boxed{P = \frac{D}{r}}$$

Model stałego wzrostu dywidendy – model Gordona-Shapiro

- Dywidendy w kolejnych okresach rosną w stałym tempie, według stopy wzrostu g.

$$D_{k+1} = (1+g) \cdot D_k$$

- Dla znanej wartości dywidendy pod koniec pierwszego okresu D_1 wartość obecna strumienia dywidend wynosi

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_1 \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{D_1 \cdot (1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$P = D_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}$$

Model stałego wzrostu dywidendy

$$P = D_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+r)^k} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{1}{r-g}$$

$$r > g$$

$$P = \frac{D_1}{r-g}$$

$$D_1 = (1+g) \cdot D$$

$$\boxed{P = \frac{D \cdot (1+g)}{r-g}}$$

Przykład 8

- Inwestor zamierza trzymać bezterminowo akcję zwykłą. Wymagana stopa zwrotu wynosi 10%. Obecna wartość dywidendy to 100. Dokonać wyceny akcji.

- **Model stałej dywidendy** $P = \frac{D}{r} = \frac{100}{0,1} = 1000$

- **Model stałego wzrostu dywidendy** (przy założeniu, że dywidenda rośnie w stałym tempie 8%)

$$P = \frac{D \cdot (1+g)}{r-g} = \frac{100 \cdot (1+0,08)}{0,1-0,08} = \frac{108}{0,02} = 5400$$

Model dwufazowy

- Wyróżnia się dwa okresy wzrostu dywidendy. Przez n lat dywidenda rośnie w tempie g_1 a po tym okresie w tempie g_2 $\left(g_1 > g_2\right)$

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \cdots + \frac{D_n}{\left(1+r\right)^n} + \frac{\boxed{P_n}}{\left(1+r\right)^n}$$

$$D_n = \left(1+g_1\right)\cdot D_{n-1}$$

$$D_{n+1} = \left(1+g_2\right)\cdot D_n$$

$$P_n = \frac{D_{n+1}}{r-g_2} = \frac{D_n \cdot \left(1+g_2\right)}{r-g_2}$$

Model dwufazowy

- Obliczamy wartość obecną dywidend wypłacanych przez n okresów według stopy g_1 (w pierwszej fazie).

- Obliczamy cenę akcji na koniec pierwszej fazy (w okresie n) według modelu Gordona-Shapiro.

- Obliczamy wartość obecną ceny akcji na koniec pierwszej fazy.

- Sumujemy wartości obecne dywidend w pierwszym okresie i ceny akcji na koniec pierwszego okresu.

Przykład 9

- Inwestor nabywa akcję zwykłą. Obecna wartość dywidendy to 100. Dywidendy przez 3 lata rosną w tempie 8%, a potem bezterminowo w tempie 3% rocznie. Wymagana stopa zwrotu wynosi 10%.

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}$$

$$D_1 = D \cdot (1+g_1)$$

$$D_2 = D \cdot (1+g_1)^2$$

$$D_3 = D \cdot (1+g_1)^3$$

$$P_3 = \frac{D_4}{r-g_2} = \frac{D_3 \cdot (1+g_2)}{r-g_2}$$

$$P_3 = \frac{D \cdot (1+g_1)^3 \cdot (1+g_2)}{r-g_2}$$

Przykład 9 cd

$$D_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}08) = 108$$

$$D_2 = 108 \cdot 1{,}08 = 116{,}64$$

$$D_3 = 116{,}64 \cdot 1{,}08 = 125{,}97$$

$$D_4 = 125{,}97 \cdot 1{,}03 = 129{,}75$$

$$P_3 = \frac{129{,}75}{0{,}1 - 0{,}03} = 1853{,}58$$

$$P = \frac{108}{1{,}1} + \frac{116{,}64}{(1{,}1)^2} + \frac{125{,}97}{(1{,}1)^3} + \frac{1853{,}58}{(1{,}1)^3} = 1681{,}84$$

Model wielofazowy – przykład 10

- Dywidenda wzrasta przez 4 lata według stopy g_1 przez 2 lata według stopy g_2, przez 3 lata według stopy g_3 i bezterminowo według stopy g_4

$$P = \frac{D_1}{1+r} + \cdots + \frac{D_9}{(1+r)^9} + \frac{P_9}{(1+r)^9}$$

$$D_1 = D \cdot (1+g_1)$$
$$D_2 = D_1 \cdot (1+g_1)$$
$$D_3 = D_2 \cdot (1+g_1)$$
$$D_4 = D_3 \cdot (1+g_1)$$

$$D_5 = D_4 \cdot (1+g_2)$$
$$D_6 = D_5 \cdot (1+g_2)$$

$$D_7 = D_6 \cdot (1+g_3)$$
$$D_8 = D_7 \cdot (1+g_3)$$
$$D_9 = D_8 \cdot (1+g_3)$$

$$P_9 = \frac{D_{10}}{r-g_4} = \frac{D_9 \cdot (1+g_4)}{r-g_4}$$